

BEITRÄGE
ZUR
BEHANDLUNG DER DISTANZMESSUNGEN
AM HIMMEL

UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER LÄNGENBESTIMMUNG DURCH MONDDISTANZEN.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

bei der

hohen philosophischen Fakultät zu Marburg

eingereicht

von

FRITZ PLATO

aus Berlin.



MARBURG 1885.

BEITRÄGE
ZUR
BEHANDLUNG DER DISTANZMESSUNGEN
AM HIMMEL

UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER LÄNGENBESTIMMUNG DURCH MONDDISTANZEN.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

bei der

hohen philosophischen Fakultät zu Marburg

eingereicht

von

FRITZ PLATO

aus Berlin.



MARBURG 1885.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0061

Einleitung.

I. Einleitung, Begründung der Wahl des Themas.

Es giebt wohl kaum ein astronomisch-geographisches Problem, für welches eine so grosse Summe von Scharfsinn und geistiger Arbeit aufgewendet worden ist, wie für die so lange vergeblich angestrebte Auffindung des Winkels, den zwei Meridiane mit einander bilden. Eine grosse Menge von Methoden lehren die geographische Länge bestimmen, viele Rechnungsvorschriften sie aus den Beobachtungen herleiten, und eine nicht geringe Anzahl von Hilfstafeln geben dem Rechner die Mittel an die Hand, das Resultat auf die schnellste und leichteste Weise zu gewinnen. Vor allen anderen ist es eine Methode, die eine lange Reihe von Jahren hindurch in der Nautik ausschliesslich in Gebrauch war und auch auf dem Lande meist benutzt wurde, ich meine die Methode der Längenbestimmung durch Mondstrecken. Von dieser dominirenden Stellung ist sie freilich jetzt auf dem Lande so ziemlich verdrängt, denn seit der elektrische Telegraph es ermöglicht, die Durchgangszeit eines Sternes durch den Mittelfaden des Passagen-Instrumentes der einen Sternwarte direct auf dem Chronographen einer anderen zu registriren, wird der relative Längenunterschied nur noch auf diese Weise bestimmt, die den grossen Vorzug hat, bei weitem genauer zu sein. So bestimmte man den Unterschied Berlin—Leipzig, Berlin—Swinemünde auf $0^{\circ}02$ genau, und noch fortwährend finden derartige Bestimmungen durch die geodätischen Institute statt.

Aber auch auf dem Meere ist man nicht mehr allein auf diese Methode angewiesen. Seit der bedeutenden Vervollkommnung der zeitmessenden Instrumente ist an Stelle der Längenbestimmung die sicherere und leichtere Zeitbestimmung getreten, da die directen Chronometer-Ablesungen, wenn nur der Gang der Uhr hinreichend bekannt ist, ein viel schnelleres Resultat liefern. Welchen Wert man dieser Methode beimisst, erhellt aus dem Umstande, dass in allen Schiffahrt treibenden Ländern Chronometer-Prüfungs-Institute eingerichtet sind, und bis zu einem wie hohen Grade der Vollkommenheit nach dieser Richtung hin die Technik gediehen ist, zeigen beispielsweise die Prüfungsergebnisse der Abtheilung IV der deutschen Seewarte. Ist nun ein Schiff, wie es in der Praxis wohl kaum anders vorkommt, mit einem oder mehreren guten Chronometern versehen, so genügt eine Zeitbestimmung, um sofort mit ziemlicher Genauigkeit den Zeitunterschied von einem Hauptmeridian zu erhalten. Allerdings bleibt daneben immer noch das Verfahren der

Längenbestimmung durch Mondstrecken bestehen, doch ist ihm in diesen beiden Fällen nicht mehr dieselbe Wichtigkeit wie früher beizumessen; trotzdem ist es immer noch von hoher Bedeutung, einerseits für Längenbestimmungen zwischen Orten, die keine Sternwarte besitzen, vor allem aber für Forschungsreisende, die compendiösere, subtilere Instrumente nicht mit sich führen können; und gerade in neuerer Zeit, wo alljährlich aus fast allen Culturstaaten in unerforschte Gebiete der Erde Expeditionen entsandt werden, die alle ohne Ausnahme mit Reflexionsinstrumenten ausgerüstet sind, bedient man sich dieses Mittels so häufig, dass es sich wohl verlohnt, darauf zurückzukommen.

II. Kurze Geschichte der Längenbestimmung durch Mondstrecken.

Das Problem, die absolute Länge durch Mondstrecken zu ermitteln, ist ein so altes, dass es sich wohl kaum feststellen lässt, wer eigentlich der erste Erfinder dieses Verfahrens war. Sicher ist, dass schon Ptolemaeus darauf hinwies, dass man in der Bewegung des Mondes ein Mittel an der Hand habe, die geographische Länge zu bestimmen. Der erste, der in der Praxis davon Gebrauch machte, scheint Amerigo Vespucci gewesen zu sein. Ich will hier nicht alle diejenigen aufzählen, die sich theils theoretisch, theils practisch mit dieser Methode beschäftigt haben, sondern verweise auf die kurze Darstellung von Zach,¹⁾ die auch Schwarz wieder abgedruckt hat.²⁾ Namentlich seitdem Newton mit Hilfe der Flamsteedschen Beobachtungen die Grundlage zu einer Mondtheorie schuf, seit derselbe grosse Forscher 1699 durch Erfindung des Spiegelsextanten ein Instrument geschaffen hatte, vermittelst dessen man Abstände des Mondes von anderen Gestirnen mit grösserer Genauigkeit zu messen im Stande ist, ist dies Thema ein so vielfach behandeltes, dass die Anzahl der darüber verfassten Abhandlungen die Hundert erreicht, oder gar dieselbe schon überschritten hat. Namentlich englische Astronomen und Fachleute haben eine grosse Menge von Schriften über diesen Gegenstand veröffentlicht.

III. Theilung der Arbeit.

Sieht man ab von der Theorie der Mondbewegung, die allerdings auch einen integrierenden Bestandteil der hier zu behandelnden Frage bildet, auf die aber nicht weiter eingegangen werden soll, so zerfällt die Lösung derselben naturgemäss in zwei Theile, in die Theorie des zu den Messungen benutzten Instrumentes und in die Berechnung dieser Messungen. Für die letztere Seite möchte ich die Arbeiten von Borda, Dunthorne, Bremiker, Legendre, Bessel, Schwarz und anderer erwähnen, auf die ich noch später zurückkommen werde. Um die erstere hat sich ausser Bohnenberger, der eine vorzügliche Theorie des Spiegelsextanten schrieb, vor allem Enke

¹⁾ Zach. Monatliche Correspondenz. Band IV. 1801.

²⁾ Schwarz. Ueber die Reduction der scheinbaren und wahren Mondstrecken auf einander. 1865.

durch eine höchst geistvolle, klare Abhandlung¹⁾ verdient gemacht. Ueber Fehlerbestimmungen und Eliminationen bei diesen Instrumenten findet man in jedem Lehrbuch der Astronomie oder der Vermessungskunde ein besonderes Kapitel. Obgleich nun, wie aus dem oben Gesagten folgt, beide Seiten der Materie hinreichend behandelt zu sein scheinen, so ergiebt sich doch aus vielen Bestimmungen, dass der wahrscheinliche Fehler einer Mondsdistanz kaum weniger als $\pm 6''.9$ beträgt, während eine auf diesem Wege gewonnene Längenbestimmung mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 15''.4$ behaftet ist, wenn man den letzteren allein aus den Beobachtungsfehlern ableitet, der direct gefundene ist aber noch drei- bis viermal grösser. Der Grund hierfür muss entweder in der Berechnungsweise oder in der Art des angewandten Instrumentes liegen; erstere kann es kaum sein, wohl aber lässt es sich in der letzteren begründen.

Capitel I. Zur Theorie der Reflexions-Instrumente.

IV. Pointirfehler.

Zur Messung von Mondsdistanzen verwendet man entweder den Spiegelsextanten, oder den Prismenkreis. Beide Instrumente aber haben einen Fehler gemeinsam, der ein ganz genaues Messen trotz aller Verbesserungen, die sie namentlich neuerlich in Deutschland und in Russland erfahren haben, absolut ausschliessen muss; es ist dies die Kleinheit des Fernrohrs, die sich nicht umgehen lässt, weil gerade die Handlichkeit des Instrumentes eine der Hauptbedingungen seiner Verwendbarkeit bildet, und die bedeutende Lichtabschwächung, die der Lichtstrahl, ehe er in das Fernrohr gelangt, durch die viermalige Brechung erleiden muss. Ersteres bedingt, da stärkere Vergrösserungen nicht anwendbar sind, einen bedeutenden Pointirfehler, letzteres wegen der immer vorhandenen mehr oder minder grossen Unvollkommenheiten der Spiegel Anomalien des Lichtweges und daher ein undeutliches Sehen. Ueber die Grösse des Pointirfehlers hat Stampfer²⁾ Versuche angestellt und veröffentlicht; das daraus gezogene Resultat ist das folgende:

Die Genauigkeit des Zielens mit guten achromatischen Fernröhren ist unter günstigen äusseren Umständen nahezu der Vergrösserung proportional, wenn dieselbe nicht zu stark ist und dadurch der Helligkeit Eintrag thut. Man findet den wahrscheinlichen Fehler beim Zielens mit einem guten, nur mässig vergrössernden Fernrohr, wenn man den des blossen Auges oder eines Diopters, der auf 15" anzuschlagen ist, mit der Vergrösserung des Fernrohrs dividirt. —

¹⁾ Astronomisches Jahrbuch von 1830.

²⁾ Jahrbücher des Wiener polytechnischen Instituts, Bd. 18.

In der Praxis ist der wahrscheinliche Fehler mindestens drei bis viermal so gross, da die günstigen äusseren Umstände eben selten vorliegen. Bei den Reflexionsinstrumenten wendet man kaum jemals eine stärkere als zehnfache Vergrösserung an, so dass der Pointirfehler rund 4" bis 5" betragen würde. Zu einem ähnlichen, nur noch bedeutend grösseren Resultate gelangt Laugier¹⁾ mit Hilfe einer ungleich genaueren und zuverlässigeren Methode. Er erhält für die Einstellung eines Sterns zwischen zwei andere Sterne für das unbewaffnete Auge einen mittleren Fehler von 36", was also bei zehnfacher Vergrösserung noch einen Zielfehler von 4" ergeben würde. Noch unsicherer sind Ränderberührungs-Einstellungen, so dass man 4" als unteren Grenzwert für den Pointirungsfehler ansehen kann, immer vorausgesetzt, dass das Fernrohr ein gutes ist. Stärkere Vergrösserungen anzuwenden ist bei der Kleinheit des Fernrohrs kaum thunlich, da die Helligkeit proportional dem Quadrate der Vergrösserung abnimmt, vorausgesetzt, dass der Durchmesser des Objectivs der gleiche bleibt. Nun aber erleidet der Lichtstrahl, wie schon erwähnt, bereits ehe er in das Fernrohr gelangt, einen bedeutenden Lichtverlust durch die viermalige Brechung und Reflexion. Durch Versuche hat man gefunden, dass die Menge des senkrecht zurückgeworfenen Lichtes von Metallsiegeln nahesten zwei Drittel, von Quecksilber die Hälfte, von Glas ein Vierzigstel der Menge des eingefallenen Lichtes beträgt.²⁾

Hiernach stellt sich der Lichtverlust bei Reflexionsinstrumenten wie folgt:

Fläche	Material	Verlust	Rest
Erster Spiegel			
1 Fläche	Glas	$\frac{1}{40}$	$\frac{39}{40}$
2 Fläche	Silber	$\frac{13}{40}$	$\frac{26}{40}$
1 Fläche	Glas	$\frac{13}{800}$	$\frac{507}{800}$
Zweiter Spiegel			
3 Fläche	Glas	$\frac{507}{32000}$	$\frac{19773}{32000}$
4 Fläche	Silber	$\frac{6591}{32000}$	$\frac{13182}{32000}$
3 Fläche	Glas	$\frac{6591}{640000}$	$\frac{257049}{640000}$

¹⁾ Experience sur la sensibilité de l'oeil dans les pointés astronomiques par M. Laugier. Astron. Nachr. No. 1086.

²⁾ Diese Zahlen entnehme ich dem Werke von C. Bauernfeind. Elemente der Vermessungskunde.

Der Gesamtverlust an Licht beträgt also $\frac{382951}{640000}$, d. h. in's Fernrohr gelangen nur $\frac{2}{5}$ des gesammten Lichtes, während $\frac{3}{5}$ auf dem Wege dahin verloren gehen. Diese Rechnung gilt für den Fall, dass man sich etwa nach dem Liebig'schen¹⁾ oder Böttger'schen¹⁾ Verfahren reine Glas-Silberspiegel hergestellt hat, in der Praxis werden wohl nur Quecksilber-Amalgam-Spiegel in Betracht kommen. Für diese stellt sich die Sachlage noch bedeutend ungünstiger. Ich lasse die Rechnung auch für diesen Fall hier folgen, indem wieder die hintere Glaswand als eine Fläche mit der Quecksilberbelegung angesehen werden soll:

Fläche	Material	Verlust	Rest
Erster Spiegel			
1 Fläche	Glas	$\frac{1}{40}$	$\frac{39}{40}$
2 Fläche	Hg	$\frac{39}{80}$	$\frac{39}{80}$
1 Fläche	Glas	$\frac{39}{3200}$	$\frac{1521}{3200}$
Zweiter Spiegel			
3 Fläche	Glas	$\frac{1521}{128000}$	$\frac{59319}{128000}$
4 Fläche	Hg	$\frac{59319}{256000}$	$\frac{59319}{256000}$
3 Fläche	Glas	$\frac{59319}{10240000}$	$\frac{2009241}{10240000}$

Der Gesamtverlust beträgt $\frac{7926559}{10240000}$ das heisst: In's Fernrohr gelangt nur $\frac{1}{5}$ des gesammten Lichtes, während $\frac{4}{5}$ auf dem Wege dahin verloren gehen. Die Dicke des Spiegels ist hierbei noch nicht einmal mit in Rechnung gezogen. Dies Verhältnis gilt für den Sextanten, günstiger liegt es scheinbar beim Prismenkreise, wo die Hypotenuse des Prismas wie ein idealer Spiegel wirkt, also die Absorption an Fläche 2 und 3 fortfällt. Nichtsdestoweniger gehen noch $\frac{1}{20}$ des Lichtes verloren, $\frac{9}{20}$ werden dem Auge des Beobachters zugeführt. Genauer ist das Verhältnis:

$$\text{Verlust:} = \frac{2806559}{5120000} \quad \text{Rest:} = \frac{2313441}{5120000}$$

¹⁾ Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, Band I.

Hierzu tritt noch die Absorption im Glase, die eine Function der Dicke desselben ist. Freilich wird dieser Lichtgewinn dadurch wieder compensirt, dass die Prismenkreise, entsprechend dem kleineren Durchmesser des Limbus, noch kleinere Fernröhre haben, wie die Spiegelinstrumente. Zu bemerken ist übrigens, dass diese Rechnungen nur für senkrecht auffallendes Licht Geltung haben, während man es beim Messen meist mit schräg auffallenden Strahlen zu thun hat, die vermöge ihres längeren Weges durch das Glas, noch stärkere Absorptionen erleiden. Eine weitere, nicht geringe Einbusse an Helligkeit erleiden die Bilder durch den Umstand, dass man bei den Reflexionsinstrumenten nur mit halben Linsen arbeitet. Nun bedarf es allerdings kaum der Erwähnung, dass das halbe Objectiv ebenso gut ein richtiges Bild liefert, wie das ganze, man denke nur an das Heliometer und die mit demselben erzielten Erfolge, aber das Bild ist natürlich im Verhältnis weniger hell, weil es nur von der halben Lichtmenge erzeugt wird. Aus diesen Deductionen nun lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

- A. Durch die starke Lichtabschwächung, die hervorgerufen wird
 - 1. durch die viermalige Brechung, welche der Lichtstrahl erleidet, ehe er in's Fernrohr gelangt,
 - 2. durch das Arbeiten mit halben Linsen,
 wird der Helligkeit soweit Abbruch gethan, dass es unstatthaft ist, dieselbe durch stärkere Vergrößerungen noch weiter zu vermindern.
- B. Bei der schwachen Vergrößerung des Fernrohrs lässt sich der Visirfehler nicht unter vier Bogensecunden bringen.
- C. Bei der Grösse des Visirfehlers kann eine Vermehrung der Ablesungsgenauigkeit durch Anwendung von Mikroskopen an Stelle der Lupen eine grössere Genauigkeit des Beobachtungsergebnisses wohl kaum nach sich ziehen.

Man ersieht hieraus leicht, worin die Hauptschwäche der Reflexionsinstrumente liegt; nicht in dem geringen Durchmesser des Limbus, sondern in der Kleinheit des Fernrohrs und dem starken Lichtverlust. Leider kann man gerade in diesem Punkte keine Aenderung und Besserung eintreten lassen, da durch eine Vergrößerung des Fernrohrs und dadurch bedingte Vermehrung der Helligkeit gerade der Hauptvorteil der Reflexionsinstrumente, ihre leichte Hantirbarkeit verloren ginge. Wollte man also auf diese Weise eine Verminderung des Pointirfehlers erstreben, so müsste eine Vergrößerung des Gewichts des ganzen Instrumentes Hand in Hand gehen. Letzteres ist aber ganz unmöglich, stellt doch schon ein grosser Troughton'scher Sextant eine nicht geringe Anforderung an die Muskelkraft des Beobachters. Etwas günstiger würde sich die Sachlage gestalten, wenn man statt der hinten belegten Glasspiegel reine Metallspiegel oder vorn belegte Glasspiegel nähme; allein der Gewinn ist kein allzugrosser, beim Sextanten würde der Lichtverlust immer noch $\frac{5}{8}$, beim Prismenkreise $\frac{2}{3}$ betragen. Dann aber stellt sich der gewiss schon öfter in Anregung gebrachten Benutzung der oben erwähnten Spiegel die unüberwindliche Schwierigkeit entgegen, dass ihre Reinheit durch atmosphärische und

andere Einflüsse bald getrübt und demzufolge ihre Wirkung so geschwächt wird, dass sie guten Glasspiegeln weit nachstehen. Diese leiden zwar auch unter denselben Einflüssen, allein, da ihre Metallfläche von zwei Seiten geschützt ist, in geringerem Grade und erst nach längerer Zeit. —

V. Spiegelfehler.

Noch eine Fehlerquelle liegt in der Benutzung der Glasspiegel, welche sich in ihrem störenden Einflüsse aber gänzlich der Rechnung entzieht. Kleine Ungleichmässigkeiten in der Glasmasse, die sich wohl nie ganz werden vermeiden lassen, führen Trübungen und Verzerrungen der Bilder herbei, ohne dass man die Grösse des hierdurch erzeugten Fehlers feststellen und in Rechnung bringen könnte.

Meines Wissens ist gerade auf die hier behandelten Umstände noch niemals grösseres Gewicht gelegt worden, wenigstens habe ich in keiner Theorie der Reflexionsinstrumente einen Hinweis darauf gefunden, während sie es doch gerade sind, welche die Ungenauigkeit des Messens mit Sextanten und Prismenkreisen gegenüber dem mit anderen Instrumenten hervorrufen. Alle übrigen Fehler, auf welche ich jetzt zu sprechen kommen werde, sind theils von verschwindendem Einflüsse, theils lassen sie sich leicht bestimmen, nur die oben erwähnten liegen in der Natur des Instrumentes begründet, lassen sich also auf keine Weise fortschaffen.

VI. Indexfehler.

Zunächst soll ein Fehler berührt werden, der eigentlich noch zum vorigen Capitel hätte hinzugezogen werden können, insofern, als bei seiner Bestimmung gerade die Ungenauigkeit des Pointirens einen grossen wahrscheinlichen Fehler übrig lässt, nämlich der Indexfehler.

Zur Bestimmung desselben hat man bei grösseren feststehenden Instrumenten ein ganz vorzügliches Mittel in der Aufstellung von Collimatoren, bei den Reflexionsinstrumenten, wo er gerade sehr leicht veränderlich ist, namentlich auch auf Reisen durch Druck und Stoss, sind leider Collimatoren nicht anwendbar.

Die Vorschriften, die man zur Auffindung desselben giebt, sind die folgenden: Am Tage bestimmt man ihn mit der Sonne durch Ränderberührungen, in der Nacht auf dieselbe Weise mit Fixsternen. Die Nachteile beider Methoden sind einleuchtend. Im ersteren Falle treten sehr bedeutende Irradiations-Erscheinungen auf; die Sonnenbilder fliessen schon in einander über, wenn sie sich noch nicht berühren, sie überdecken sich noch, wenn sie schon auseinander sind. Am besten macht man die Einstellung in der Weise, dass man erst die beiden Bilder einander bis zur Berührung nähert, sie dann über einander wegleiten lässt, bis ein Uebergreifen der Ränder nicht mehr stattfindet; macht man nun dieselbe Doppeleinstellung von der entgegengesetzten Seite, so wird das

Mittel aus allen vier Pointirungen einen ziemlich genauen Wert des Indexfehlers geben. Eine Art von Kontrolle über die Genauigkeit des so gewonnenen Resultats liegt darin, dass die halbe Differenz je einer Doppeleinstellung den Sonnendurchmesser ergeben muss, natürlich um den doppelten Effect der Irradiation zu gross. Nach Schwarz hat eine Ränderberührung der Sonnenbilder einen wahrscheinlichen Fehler von $\pm 3''.3$. Meine zahlreichen, nach dieser Methode ausgeführten Bestimmungen ergaben ein nahezu gleiches Resultat; ich fand den wahrscheinlichen Fehler $\pm 3''.1$. Die Schwäche der zweiten Methode liegt ebenfalls in den physiologischen Eigenschaften des menschlichen Auges begründet. „Es“) ist klar, dass zwei helle Punkte nur dann als zwei erkannt werden können, wenn der Abstand ihrer Bilder grösser ist, als die Breite eines Netzhautelementes. Wäre er kleiner, so würden beide Bilder immer auf dasselbe oder auf zwei benachbarte Elemente fallen müssen. Im ersteren Falle würden beide nur eine einzige Empfindung erregen, im zweiten Falle zwar zwei Empfindungen, aber in benachbarten Nervelementen, wobei nicht unterschieden werden könnte, ob zwei gesonderte Lichtpunkte, oder nur einer da ist, dessen Bild auf die Grenze beider Elemente fällt. Erst wenn der Abstand der beiden hellen Bilder, oder wenigstens ihrer Mitten von einander grösser ist, als die Breite eines empfindenden Elementes, erst dann können die beiden Bilder auf zwei verschiedene Elemente fallen, die sich gegenseitig nicht berühren, und zwischen denen ein Element zurückbleibt, welches nicht, oder wenigstens schwächer als die beiden ersten von Licht getroffen wird.“ Diese Deductionen schildern genau den vorliegenden Fall, die Bilder des Sterns werden schon oder noch zusammenfallen, wenn der Zwischenraum zwischen beiden selbst schon ein grösserer ist, da eben die Netzhaut nicht unendlich empfindlich ist. Die Praxis hat diese theoretischen Betrachtungen nur bestätigt. Schwarz fand, dass die Berührung der beiden Bilder eines Sternes gemessen wird mit einem wahrscheinlichen Fehler $\pm 4''.4$. — Diese Schwäche des Auges überwindet man, wenn man statt der Punkte Linien einführt, an Stelle der Berührungen Bisectionseinstellungen eintreten lässt, den Collimator an das Firmament zu versetzen versucht und wie bei diesem den Intensitätssinn mit zu Hilfe zieht, der theoretisch 50 mal, practisch immer noch 10 mal so scharf zu messen erlaubt, als der Ortssinn. Als geeignete Objecte für diese Art der Einstellung bieten sich die Doppelsterne dar. Man lässt das Spiegelbild erst von der einen, dann von der andern Seite in das directe übergreifen, in jedem Falle entstehen drei

* † * †	1 Lage	gleiche Zwischenräume, deren Gleichheit, da sie selbst dunkel, von hellen scharfen Punkten begrenzt sind, sich sehr gut abschätzen lässt.
† * † *	2 Lage	

Als passende Doppelsterne bieten sich beispielsweise dar: ϵ Lyrae, α Capricorni, θ Tauri. Als Kontrolle möge dienen, dass man zugleich, wie bei den Ränderberührungen der Sonne den Durchmesser, so hier die Distanz der beiden Sterne erhält. Stehen die Componenten des Paares sehr nahe, so verfällt man bei der Bisectionseinstellung in denselben Fehler, der mit dieser Methode vermieden werden soll.; stehen sie

“) Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik.

...	*	†	†	1 Lage
†	†	*	*	2 Lage
1 Lage				2 Lage
*	†		†	*
*	†		†	*
1 Lage				2 Lage
*			†	
*	†		†	*
†			*	

sehr weit, so verliert das Auge den Ueberblick über alle drei Zwischenräume. Im ersteren Falle legt man die Bilder einfach nebeneinander statt ineinander, im letzteren Falle ersetzt man die Bisectionseinstellung durch eine quadratische oder rhombische Einstellung. Die beiden letzten Arten gewähren noch den Vorteil, dass man zugleich auch durch Abschätzung sehen kann, ob der Winkel, den beide Diagonalen miteinander bilden, auch ein rechter ist. Eine Differenz in der Genauigkeit der einzelnen Einstellungsarten hat sich nicht gezeigt. Wie man die Einstellung aber auch in jedem einzelnen gegebenen Falle anstellt, immer hat man den Vorteil, dass eine grössere Anzahl von Netzhautelementen durchsetzt wird, also genauere Messungen möglich sind. Den wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung fand ich zu $\pm 3''.1$, also nicht grösser, wie bei Ränderberührungen der Sonne, $1''.3$ kleiner als bei dem alten Verfahren, was entschieden zu Gunsten dieser neuen Methode spricht. Zu bemerken ist noch, dass beide Sterne selbstverständlich möglichst gleiche Helligkeit haben müssen, und dass der Index immer in derselben Lage der Sextanten-Ebene bestimmt werden muss, in der die nachherige Messung ausgeführt werden soll. Ersteres ist deshalb unbedingt nötig, weil man sonst bei der Bisection die Entfernung der beiden helleren Sterne zu gross, die der minder hellen zu klein abschätzen würde, wodurch man den Index falsch bestimmt erhielte. Was den letzteren Punkt anbetrifft, so kann in Folge von Ungleichförmigkeiten im Guss oder in der Dicke der Metallteile des Instrumentes eine ungleiche Verteilung der Schwere stattfinden. Bei grossen Kreisen, wie z. B. bei Meridianinstrumenten, kann die Durchbiegung bekanntlich einen recht bedeutenden Einfluss erreichen, aber auch bei Sextanten, wenn sie nicht besonders fest gebaut sind, wird man den Indexfehler anders in horizontaler, anders in verticaler Lage der Limbusebene erhalten. Darum empfiehlt es sich, Indexbestimmung und nachherige Messung möglichst in derselben Ebene auszuführen. Dadurch ist zugleich gegeben, welche von den einzelnen Einstellungsmethoden man in jedem gegebenen Falle anzuwenden hat, sie werden bestimmt durch den Positionswinkel der beiden Doppelsterne und den Neigungswinkel der Verbindungslinie der beiden zu messenden Objecte gegen die Horizontale.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass der Collimationsfehler vor jeder Beobachtung neu bestimmt werden muss, ja womöglich noch einmal nach der Einstellung, da er im höchsten Masse Variationen unterworfen ist, einestheils weil der Neigungswinkel der zu messenden Distanz sich ziemlich schnell ändert, also auch die Lage der Sextantenebene, andrerseits weil die Neigung der Spiegel infolge der ungleichen Ausdehnung des Glases und des Metalls der Fassung fortwährenden Schwankungen unterworfen ist, endlich erleidet auch das ganze Instrument durch die Temperatur und durch Erschütterungen kleinere oder grössere Deformationen.

VII. Die übrigen Fehler des Sextanten.

Ueber die übrigen Fehler, die den Reflexionsinstrumenten anhaften, kann ich kurz hinweggehen, es sind dies die folgenden:

1. Teilungsfehler des Limbus,
2. Nichtparallelismus der Spiegel,
3. Prismatische Gestalt der Spiegel,
4. Neigung der Spiegel,
5. Neigung der Fernrohraxe,
6. Excentricität.

Alle diese Fehler sind von verschwindend kleinem Einflusse und werden vom Mechaniker schon insoweit berichtet, dass sie nicht mehr ins Gewicht fallen, ausserdem findet man in jedem besseren Lehrbuch der Astronomie oder der Vermessungskunde, namentlich aber im Sawitsch detaillirte Vorschriften zu ihrer Elimination.¹⁾ In dem schon citirten Werk von Bauernfeind finden sich auch Täfelchen über das Wachsen dieser Fehler mit dem gemessenen Winkel. Drei Fehlerquellen sind hauptsächlich von bedeutendem Einflusse und nur schwer zu vermeiden, es sind dies: Excentricität, prismatische Gestalt des grossen Spiegels, Collimationsfehler. Die Formen der einzelnen Coefficienten sind:

$$\text{Excentricität } dw = \left(\frac{e}{r} \cos \frac{1}{2} O \sin \frac{1}{2} s - \frac{e}{r} \sin \frac{1}{2} O \cos \frac{1}{2} s \right) 206265$$

$$\text{Prismatische Gest. } dw = 3\delta \sqrt{\sec^2 \left(\frac{s}{2} + \beta \right) + \frac{4}{9} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{s}{2} + \beta \right)}$$

$$\text{Collimations-F. } dw = -i^2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}$$

Den verderblichen Einfluss der prismatischen Gestalt des Spiegels ersieht man noch besser, wenn man den Divergenzwinkel berechnet, den der heraustretende Strahl mit demjenigen bildet, der bei Parallelismus der Spiegelwände ausgetreten wäre. Es ist nämlich:

$$d = 2g + a - i,$$

wo g den Kantenwinkel des Prismas bezeichnet, das der Spiegel in diesem Falle darstellen würde, a den Einfalls-, i den Brechungswinkel, so dass also

$$\sin a = n \sin i,$$

wo n der Brechungscoefficient von Luft in Glas ist. Man sieht also, dass der Divergenzwinkel eine Function des doppelten Kantenwinkels ist, so dass er, selbst wenn g klein ist, doch von Belang werden kann.

Will man für ein einzelnes Instrument den Einfluss dieser Fehler kennen lernen, so empfiehlt sich besonders die folgende Methode:

Es ist ersichtlich, dass eine jede der genannten Fehlerquellen darnach strebt, eine gemessene Distanz in dem einen oder anderen Sinne zu verändern. Es ist daher

¹⁾ Einen vortrefflichen Beitrag in dieser Beziehung liefert auch der nach Vollendung dieser Arbeit erschienene Aufsatz von Eylert, Der Sextant. (Archiv der deutschen Seewarte. IV. Jahrgang.)

naheliegend, bekannte Distanzen zu messen; die Abweichung des wahren vom beobachteten Werte wird dann eine Wirkung der Fehler des Instrumentes sein. Man könnte demnach die Entfernung zweier terrestrischer Objecte erst mit einem Universalinstrument, dann mit dem Sextanten messen. Mehr empfiehlt es sich, zu diesem Zwecke eine grössere Anzahl von Sterndistanzen zu beobachten und zu berechnen, um eine Reihe von Bedingungsgleichungen für die Fehler zu erhalten. Bei terrestrischen Objecten müsste, da sie nicht unendlich weit entfernt sind, eine Correction wegen Nichtparallelismus der Strahlen und wegen lateraler Refraction eintreten. Die Einstellung der Sterndistanzen geschieht am besten nach demselben Princip, nach dem bei Bestimmung des Indexfehlers verfahren wurde. Der einfache Stern wird durch Drehung des Spiegels zwischen die beiden Componenten eines Doppelstern-Paares gebracht, wobei es zweckmässig erscheint, den Doppelstern mit dem Spiegel festzuhalten und auf den anderen, helleren Stern direct zu visiren. Auf diese Weise erhält man ein sehr genaues Resultat, vorausgesetzt, dass bei der Messung alle drei Sterne auf einer Geraden lagen. Aus allerdings nur 200 Beobachtungen fand ich den wahrscheinlichen Fehler einer solchen Einstellung zu 2".3. Man erhält auf diese Weise eine Reihe von Gleichungen von der Form:

$$l = x \sin \frac{1}{2} s + y \cos \frac{1}{2} s - i^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} s + 3 \delta \sqrt{\sec^2 \left(\frac{s}{2} + \beta \right) + \frac{4}{9} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{s}{2} + \beta \right)}$$

oder $l = ax + by - c^2 z + dw$,

aus denen sich Excentricität, prismatische Gestalt des grossen Spiegels und Collimationsfehler herleiten lässt. Wenn man nun nach jeder Ortsbestimmung noch einige Sterndistanzen misst, so wird man über die Beschaffenheit seines Instrumentes in jedem Augenblick im Klaren sein und etwaige Fehler desselben streng in Rechnung setzen können. Es erfordert dies wenig Umstände, da man die Zeit nur auf die ganze Minute genau zu haben braucht, die meteorologischen Instrumente auf ganze Grade bezüglich Millimeter. Anwendung findet diese Methode nur da, wo die Polhöhe bekannt ist, da man diese zur Berechnung der Zenithdistanz braucht, weiss man die Breite nicht genügend, so wird man terrestrische Objecte an Stelle der Sterne verwenden oder die Fehler des Instrumentes einzeln bestimmen nach den Vorschriften, wie sie Sawitsch und andere¹⁾ geben.

Capitel II. Refraction und Parallaxe.

Die Fehler des Instrumentes, das man zum Messen benutzt, sind nur die eine Ursache, die verändernd auf eine beobachtete Distanz zweier coelestischer Objecte einwirkt, sie bilden in denselben einen constanten Factor, ausserdem werden dieselben aber auch noch beeinflusst durch die Refraction und die Parallaxe.

¹⁾ Siehe auch Eylert, Der Sextant.

VIII. Einfluss der Refraction auf Sterndistanzen.

Beim Messen von Sterndistanzen wird es nur selten vorkommen, dass die beiden Componenten auf demselben Parallelkreise liegen, in welchem Falle die Refraction auf beide in gleicher Weise einwirkt; haben beide nicht dieselbe Höhe, so muss der Einfluss der Refraction auf ihre gegenseitige Entfernung berücksichtigt werden. Dieselbe erhebt den tiefer stehenden Stern mehr, als den höheren, der sich dem Zenith näher befindet. Dadurch werden die Objecte einander genähert, ihre Distanz demnach verringert. Diese Distanzänderung ist also eine Function des Höhenunterschiedes der beiden Sterne.

$$\Delta D = F(h - h_1) = F(z - z_1)$$

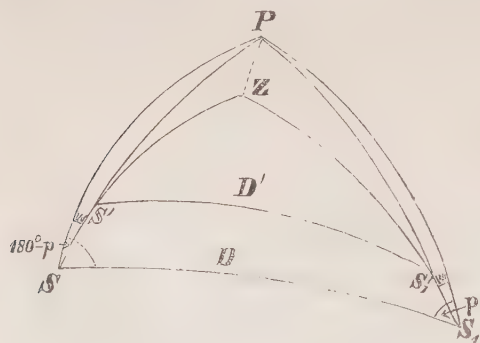
Ist $h = h_1$, so wird $\Delta D = 0$, es erreicht seinen Maximalwert für $h - h_1 = 90^\circ$, d. h. wenn der eine Stern im Zenith steht, der andere dagegen im Horizont. Practisch kommen nur Unterschiede vor bis $h - h_1 = 80^\circ$, in diesem Falle wird $\Delta D = 5' 13''$. —

VIIIa. Doppelsterne.

Der Specialfall $h = h_1$ tritt ein bei Doppelsternen, bei diesen kann man also die Refraction vernachlässigen. Merklich werden könnte sie nur, wenn die beiden Componenten tief am Horizont in einem Vertical stehen, ein Fall, bei dem wenige Minuten Höhendifferenz allerdings schon starke Aenderungen der Refractionswirkungen hervorrufen. Hiervon indessen kann man wohl absehen, da man ja immer die Wahl zwischen mehreren Doppelsternen haben wird und nicht wie beim Monde an ein specielles Object gebunden ist.

VIIIb. Andere Fixsterne.

Geht man auf diesen ganz besonderen Fall nicht weiter ein, so wird man die Refraction in ihrem Einfluss auf die Entfernung zweier Objecte am Himmel in Rechnung stellen müssen. Man kann nun die Distanz berechnen aus Rectascension und Declination, oder aus Höhe und Azimut. Bei Fixsternen findet eine Aenderung im Azimute nicht statt, man wird demnach dieses nicht erst berechnen, sondern die Distanz direct aus den α



und δ aufsuchen. Beim Monde dagegen, wo durch die Parallaxe auch das Azimut ein anderes wird, würde die Bildung der $d\alpha$ und $d\delta$ eine ziemlich zeitraubende Rechnung werden; man zieht es also vor, die Distanzformel für Höhen und Azimute aufzustellen. Die Form und Grösse der Correction ΔD lässt sich in beiden Fällen leicht aufstellen. Bezeichnen P und Z die respectiven Pole der täglichen Drehung und der Schwere, SS_1 zwei Sterne, so ist D die Entfernung derselben von einander, — die gestrichelten Grössen sind die durch Refraction veränderten. Dann ist

$$\begin{aligned} \cos D &= \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1) \\ &= \sin h \sin h_1 + \cos h \cos h_1 \cos (a - a_1) \end{aligned}$$

Differenzirt man zunächst die erste Gleichung nach Refraction, so erhält man:

$$\begin{aligned} -\sin D \frac{dD}{dR} &= \cos \delta \sin \delta_1 \frac{d\delta}{dR} + \sin \delta \cos \delta_1 \frac{d\delta_1}{dR} \\ &\quad - \sin \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1) \frac{d\delta}{dR} - \cos \delta \sin \delta_1 \frac{d\delta_1}{dR} \\ &\quad - \cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1) (d\alpha - d\alpha_1) \end{aligned}$$

Geordnet geht die Gleichung über in:

$$\begin{aligned} 1) -\sin D dD &= d\delta \{ \cos \delta \sin \delta_1 - \sin \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1) \} \\ &\quad + d\delta_1 \{ \sin \delta \cos \delta_1 - \cos \delta \sin \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1) \} \\ &\quad - \cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1) d\alpha + \cos \delta \cos \delta_1 \sin (\alpha - \alpha_1) d\alpha_1 \end{aligned}$$

Bezeichnet man noch in der obigen Figur die parallactischen Winkel mit w und w_1 , die Positionswinkel mit p und p_1 , so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin D \sin p_1 &= \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_1) \\ \sin D \sin p &= \cos \delta_1 (\sin \alpha - \sin \alpha_1) \\ \sin D \cos p_1 &= \sin \delta \cos \delta_1 - \cos \delta \sin \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1) \\ -\sin D \cos p &= \sin \delta_1 \cos \delta - \cos \delta_1 \sin \delta \cos (\alpha - \alpha_1) \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte ein in 1) so formt sich diese Gleichung um zu:

$$\begin{aligned} -\sin D dD &= -\sin D \cos p d\delta + \sin D \cos p_1 d\delta_1 \\ &\quad - \cos \delta \sin D \sin p d\alpha + \cos \delta_1 \sin D \sin p_1 d\alpha_1 \\ 2) dD &= d\delta \cos p - d\delta_1 \cos p_1 + d\alpha \cos \delta \sin p - d\alpha_1 \cos \delta_1 \sin p_1 \end{aligned}$$

Was den Wert von dD anbelangt, so ist zunächst:

$$\begin{aligned} d\delta &= k \operatorname{tg} z \cos w \\ d\alpha &= k \operatorname{tg} z \sin w \sec \delta \end{aligned}$$

wo k die Bessel'sche Refractionsconstante bedeutet, also:

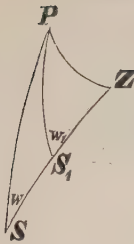
$$k = \alpha \beta^4 \gamma^2$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 2) ein, so ist

$$\begin{aligned} dD &= k \operatorname{tg} z \cos p \cos w - k_1 \operatorname{tg} z_1 \cos p_1 \cos w_1 \\ &\quad + k \operatorname{tg} z \sin p \sin w - k_1 \operatorname{tg} z_1 \sin p_1 \sin w_1 \\ 3) dD &= k \operatorname{tg} z (\cos p \cos w + \sin p \sin w) \\ &\quad - k_1 \operatorname{tg} z_1 (\cos p_1 \cos w_1 + \sin p_1 \sin w_1) \end{aligned}$$

oder schliesslich

$$dD = k \operatorname{tg} z \cos (p - w) - k_1 \operatorname{tg} z_1 \cos (p_1 - w_1)$$



Mit Hilfe dieser Formel liesse sich aus der durch Refraction verfälschten Distanz die corrigirte berechnen. An dieser Stelle sollen jedoch einige andere Betrachtungen daran geknüpft werden. Setzt man $p = w$, $p_1 = w_1$, so hat man die Bedingung dafür, dass beide Sterne in demselben Vertical stehen, setzt man schliesslich noch $z_1 = 0$, so wird dD seinen Maximalwert erreichen, es wird

$$dD = k \operatorname{tg} z$$

Die Zenithrefraction des tiefer stehenden Sternes geht mit ihrem Gesamtbetrage ein. In der Praxis wird z selten grösser genommen als 80° , in diesem extremen Fall ist $dD = 313''$.

Was die Grösse der einzelnen Componenten von dD anbetrifft, so war

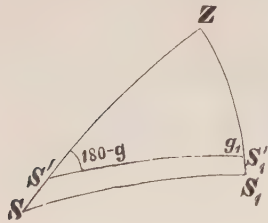
$$d\delta = k \operatorname{tg} z \cos w$$

$$d\alpha = k \operatorname{tg} z \sin w \sec \delta$$

Ersteres wird ein Maximum haben für $w = 0$, wo $d\alpha$ ein Minimum hat, der Stern steht dann im Meridian, $z = (\varphi - \delta)$, die ganze Zenithrefraction geht in $d\delta$ ein, es wird:

$$d\delta = k \operatorname{tg} z \quad d\alpha = 0$$

es kann also eine Grösse von $313''$ erreichen, wenn $z = 80^\circ$ $d\alpha$ hat ein Maximum um $t = 6^h - 7^h$ und $\delta = 80^\circ$ und wird dann $= 258''9$. Ueber die genaueren Grössenverhältnisse von $d\alpha$ und $d\delta$ giebt Tafel I im Anhang Aufschluss, welche mit dem doppelten Eingang Stundenwinkel und Declination die Grössen $d\alpha$ und $d\delta$ giebt. —



Führt man statt der äquatorealen horizontale Coordinaten ein, so kann man dieselbe Entwicklung durchführen. Da ich später von derselben Gebrauch machen werde, so will ich auch diese hier folgen lassen. Zu bemerken ist hierzu nur, dass die Winkel ZSS_1 und ZS_1S bezeichnet werden mit respective $180^\circ - g$ und g_1 . Dann ist im Dreieck ZSS_1

$$\cos D = \cos z \cos z_1 + \sin z \sin z_1 \cos (a - a_1)$$

$$\sin D \cos g_1 = \cos z \sin z_1 - \sin z \cos z_1 \cos (a - a_1)$$

$$- \sin D \cos g = \sin z \cos z_1 - \cos z \sin z_1 \cos (a - a_1)$$

$$- \sin D dD = - \sin z \cos z_1 dz - \cos z \sin z_1 dz_1 + \cos z \sin z_1 \cos (a - a_1) dz + \sin z \cos z_1 \cos (a - a_1) dz_1$$

Da a und a_1 , die Azimute durch die Refraction nicht geändert werden, so wird da und da_1 gleich 0 und die dasselbe enthaltenden Glieder werden zum Verschwinden gebracht. Es ist

$$- \sin D dD = dz \left\{ \sin z \cos z_1 - \cos z \sin z_1 \cos (a - a_1) \right\} + dz_1 \left\{ \cos z \sin z_1 - \sin z \cos z_1 \cos (a - a_1) \right\}$$

Dieselben Gleichungen, wie für p gelten hier für g , so dass die Gleichung wird:

$$dD = dz \cos g - d z_1 \cos g_1$$

und schliesslich

$$dD = k \operatorname{tg} z \cos g - k \operatorname{tg} z_1 \cos g_1$$

Wird $g = 0$, $g_1 = 0$, so befinden sich die beiden Sterne auf derselben Verticale und dD erreicht sein Maximum, wenn noch ausserdem $z_1 = 0$, ähnlich wie oben. —

8c. Correction des Halbmessers.

Hat eins der Gestirne einen messbaren Durchmesser, so wird die Entfernung vom nächsten Rande gemessen, es muss demnach, um dieselbe auf den Mittelpunkt zu reduciren, noch der Halbmesser des Gestirns zu D addirt werden. Dieser aber wird, da die Refraction anders auf den oberen, anders auf den unteren Rand, oder den Mittelpunkt wirkt, ein variabler sein. Zu gleicher Zeit wird sich also auch die Figur der erleuchteten Scheibe umgestalten. Gewöhnlich nimmt man die durch die Refraction veränderte Mond- oder Sonnenscheibe als eine Ellipse an, deren Abplattung gleich $-\frac{dq}{q}$. Diese Annahme ist an und für sich falsch, da sie den Unterschied der Refractionen für den Mittelpunkt und die Ränder vernachlässigt. — Die umschreibende Figur besteht vielmehr aus zwei halben Ellipsen, die die grosse Achse gemeinsam haben, deren kleine Achsen aber ungleich sind. Allein Schwarz hat nachgewiesen, dass die erstere Annahme zwei Fehler erzeugt, die sich gegenseitig aufheben; man setzt den gemessenen Bogen um ebenso viel zu klein, als man den Radius vorher zu gross annimmt. Bleibt man also bei der Ellipse stehen, so ist:

$$q' = q - \Delta q \cos^2 m.$$

Es käme nun darauf an, Δq zu berechnen, das heisst die Veränderung des Verticaldurchmessers. Die Berechnung ist eine äusserst einfache, wenn man die Distanzformel anwendet, indem man den Mittelpunkt als das eine Object, den Punkt am Rande als das andere ansieht. Dann ist also $D = q$, $g = m$, $g_1 = m_1$, und man erhält ohne weiteres:

$$\Delta q = \cos m \, dz - \cos m_1 \, dz_1;$$

da m und m_1 sich nur um Grössen höherer Ordnung von einander unterscheiden, so kann man setzen $m = m_1$ und

$$\Delta q = \cos m (k \operatorname{tg} z - k_1 \operatorname{tg} z_1).$$

Setzt man wieder $m = 0$, so liegen Rand- und Mittelpunkt auf einem Verticalhalbmesser und man erhält die Veränderung desselben ausgedrückt durch:

$$\Delta q = k \operatorname{tg} z - k_1 \operatorname{tg} z_1$$

ganz entsprechend dem Maximalwerte von dD . Damit wäre also die Abplattung der Ellipse gegeben. Will man nun den Wert von Δq tabuliren, so muss man die Gleichung noch umformen dadurch, dass man z_1 und k_1 durch z und k ausdrückt, und zwar auf folgende Weise. Es ist:

$$\cos z_1 = \cos q \cos z + \sin z \sin q \cos m.$$

Da q immer eine kleine Grösse ist — es wird höchstens 1000" — so wird man setzen dürfen:

$$\sin q = q \dots \quad \cos q = 1 - \frac{q^2}{2} \dots$$

Dann ist:

$$\cos z_1 = \cos z \left(1 - \frac{q^2}{2} \dots \right) + q \sin z \cos m \quad \text{oder:}$$

$$\cos z_1 - \cos z = q \sin z \cos m - \frac{q^2}{2} \cos z.$$

Nun ist $\cos z_1 - \cos z = -2 \sin \frac{z_1 + z}{2} \sin \frac{z_1 - z}{2}$

oder da $\frac{1}{2}(z_1 - z)$ höchstens von der Ordnung von q ist, so setzt man:

$$\sin \frac{z_1 - z}{2} = \frac{dz}{2} \dots \quad \text{also ist:}$$

$$dz = - \frac{1}{\sin \left(z + \frac{dz}{2} \right)} \left\{ q \sin z \cos m - \frac{q^2}{2} \cos z \right\} \dots$$

Führt man die Division des Bruches auf der rechten Seite aus, so wird:

$$\frac{1}{\sin \left(z + \frac{dz}{2} \right)} = \operatorname{cosec} z - \operatorname{cosec} z \cotg z \frac{dz}{2} + (1 - \cotg^2 z) \operatorname{cosec} z \frac{dz^2}{4} \dots$$

Setzt man diesen Wert, der bis auf die dritte Potenz genau ist, ein, so ist

$$dz = \left\{ \operatorname{cosec} z - \operatorname{cosec} z \cotg z \frac{dz}{2} + (1 - \cotg^2 z) \operatorname{cosec} z \frac{dz^2}{4} \right\} \\ \left(-q \sin z \cos m + \frac{q^2}{2} \cos z \right) \dots$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder höheren als des zweiten Grades nach Ausführung der Multiplication:

$$dz = -\varrho \cos m - \cotg z \frac{dz}{2} \cos m + \dots + \frac{\varrho^2}{2} \cotg z + \dots$$

$$dz (1 - \cotg z \cos m) = -\varrho \cos m + \frac{\varrho^2}{2} \cotg z.$$

Dividirt man noch mit dem Factor von dz , so ist:

$$dz = z_1 - z = -\varrho \cos m + \frac{\varrho^2}{2} \cotg z \sin^2 m$$

$$z_1 = z - \varrho \cos m + \frac{\varrho^2}{2} \cotg z \sin^2 m$$

Was nun $k - k_1$ anbelangt, so ist $\Delta k = f(z - z_1)$. Ist $z - z_1$ wie hier eine kleine Grösse, so kann man Δk der Zenithdistanz proportional setzen,

$$\Delta k = k - k_1 = c_1 (z - z_1)$$

$$\Delta k = k - k_1 = c_1 \left(-\varrho \cos m + \frac{\varrho^2}{2} \cotg z \sin^2 m \right)$$

Wir haben also

$$k_1 = k + c_1 \left(\varrho \cos m - \frac{\varrho^2}{2} \cotg z \sin^2 m \right)$$

c_1 ist die Aenderung von k für eine Secunde. Bei $z = 85^\circ$ ist $c_1 = 0''.000052$ oder für $1000''$ ist die Aenderung erst $0''.052$, bei geringeren Zenithdistanzen fällt c_1 rasch, für $z = 80^\circ$ ist es nur noch $0''.000014$, bei $z = 70^\circ$ $c_1 = 0''.0000020$. Man ist also berechtigt, selbst bei höheren Zenithdistanzen es für eine genügende Näherung anzusehen, wenn man setzt:

$$k_1 = k + c_1 \varrho \cos m.$$

Bei Zenithdistanzen unter 80° kann man $k = k_1$ setzen. Setzt man nun diese Werte in $\Delta \varrho$ ein, nachdem wieder $m = 0$ angenommen ist, so wird:

$$\Delta \varrho = k \tg z - (k + c_1 \varrho) \tg (z - \varrho)$$

oder für kleinere Zenithdistanzen

$$\Delta \varrho = k \{ \tg z - \tg (z - \varrho) \}$$

Damit ist die Abplattung der Ellipse gegeben, und die Correction für Halbmesser ist:

$$dD = \varrho - \Delta \varrho \cos^2 m.$$

Wollte man eine Formel in aller Strenge aufstellen, so müsste auch die laterale Refraction noch berücksichtigt werden. Dieselbe entsteht dadurch, dass Refraction und

Parallaxe nicht in derselben Ebene wirken, sondern die Refraction in einer durch den Pol der Schwere gehenden, die Parallaxe in einer durch den Pol der täglichen Drehung gehenden Ebene. Die so entstehende laterale Refraction ist jedoch nur sehr unbedeutend, kann also vernachlässigt werden. — Um die durch die Refraction hervorgebrachten Aenderungen der Distanz noch einmal kurz zu wiederholen, lasse ich hier die Endformeln folgen. Es war:

1. 2 Fixsterne $dD = k \operatorname{tg} z \cos (p - w) - k_1 \operatorname{tg} z_1 \cos (p_1 - w_1)$
2. Mond-Fixstern $dD = k_m \operatorname{tg} z_m \cos g_m - k_s \operatorname{tg} z_s \cos g_s$
 $+ q_m - \Delta q_m \cos^2 m_m$
3. Mond-Sonne $dD = k_m \operatorname{tg} z_m \cos g_m - k_s \operatorname{tg} z_s \cos g_s$
 $+ q_m - \Delta q_m \cos^2 m_m + q_s - \Delta q_s \cos^2 m_s$

IX. Einfluss der Parallaxe auf Sterndistanzen.

Ausser der Refraction kommt noch ein zweiter Factor in Betracht, der verändernd auf die Distanz zweier cölestischer Objecte einwirken kann, es ist dies die Parallaxe. Bei der gegenseitigen Entfernung zweier Fixsterne kann man dieselbe vernachlässigen, denn einerseits schwanken die Zahlen, die für den Wert der Fixsternparallaxen angegeben werden, sehr bedeutend, — so beispielsweise bei Groombridge 1830 zwischen 0".009 (Brünnow) und 1".058 (Faye) — man kann sie demnach gar nicht in Rechnung stellen, andererseits übt selbst eine sehr grosse Fixsternparallaxe, wie die von α Centauri 1".14 (Henderson) noch gar keinen irgendwie nennenswerten Einfluss auf die Distanz aus. Anders verhält sich die Sache bei der Sonne und bei dem Monde, bei denen die Parallaxe eine merkliche Grösse erreicht. Um zu untersuchen, in wie weit die Parallaxe zu berücksichtigen ist, soll hier eine Entwicklung derselben folgen. Man bezeichne mit:

- a den Aequatoreal-Halbmesser der Erde,
- D' die Entfernung vom Beobachtungsorte,
- D die Entfernung vom Erdcentrum,
- h, H die geocentrischen Höhen,
- h', H' die scheinbaren Höhen,
- h_0, H_0 die wahren Höhen,
- aq den Radiusvector des Beobachtungsortes in Teilen des Aequatorealhalbmessers a , also

$$q = 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi = 1 - 0.0033375 \sin^2 \varphi.$$

Setzt man zunächst die Erde als sphärisch voraus, so fallen der Pol der täglichen Drehung und der Pol der Schwere zusammen, weil der Schwerpunkt einer homogenen Kugel, als welche wir uns die Erde zu denken haben, in ihren Mittelpunkt fällt.

Für die Sonne macht diese Annahme keinen Unterschied. Nun ist zunächst ganz allgemein $\Delta h = h' - h$ und

$$\sin q = \frac{a\varrho}{D} \cos h',$$

also q die Höhenparallaxe $= h' - h$, die Parallaxe ist proportional der scheinbaren Zenithdistanz. Ist $h' = 0^\circ$, so ist $\cos h' = 1$, und man erhält:

$$\sin q = \frac{a\varrho}{D} \text{ die Horizontalparallaxe.}$$

Im Aequator ist $a\varrho = a$ dem Aequator-Halbmesser

$$\sin q = \frac{a}{D} \text{ die Aequatoreal-Horizontalparallaxe. —}$$

Betrachtet man zunächst die Sonne.

Die Aequatoreal-Horizontalparallaxe derselben bezeichnet man mit π , wo $\pi = 8''.80$, die Horizontalparallaxe

$$P = \varrho \sin \pi, \text{ mithin} \\ \sin q = \varrho \sin \pi \cos h'$$

bei der Kleinheit von π , also auch von q , kann man den $\sin$ mit dem Bogen vertauschen, also setzen:

$$q = \Delta h = \varrho \pi \cos h' \dots$$

Bei dem Monde kann man die Glieder höherer Ordnung nicht so ohne weiteres vernachlässigen, da die Mondsparallaxe einen bei weitem grösseren und mit der Stellung des Mondes gegen die Erde veränderlichen Wert hat; derselbe wechselt zwischen $54'$ und $61'$. Bei der grossen Variation dieses Wertes wird es nicht genügen, einen mittleren Wert der Mondsparallaxe anzunehmen, sondern es muss die Grösse derselben streng für die Beobachtungszeit und den Beobachtungsort in Rechnung gestellt werden, man wird also zu setzen haben:

$$\sin q = \varrho \sin \pi_t \cos h'$$

Eine zweite Frage ist die, ob es genügt zu setzen

$$q = \varrho \pi_t \cos h'$$

Zu dem Zweck, zu sehen, wie gross die Glieder höherer Ordnung werden, entwickelt man

$$\sin q = q \sin 1'' - \frac{1}{6} q^3 \sin^3 1'' \dots$$

$$\sin \pi_t = \pi_t \sin 1'' - \frac{1}{6} \pi_t^3 \sin^3 1'' \dots$$

eingesetzt wird:

$$q \sin 1'' - \frac{1}{6} q^3 \sin^3 1'' \dots = \varrho \pi_t \sin 1'' \cos h' - \frac{1}{6} \varrho \pi_t^3 \sin^3 1'' \cos h' \dots$$

$$q = \varrho \pi_t \cos h' + \frac{1}{6} \sin^2 1'' (q^3 - \varrho \pi_t^3 \cos h' \dots)$$

Nimmt man nun vorläufig den obigen Ausdruck

$$q = \varrho \pi_i \cos h'$$

als eine erste Näherung an, und führt ihn auf der rechten Seite unserer Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} q &= \varrho \cos h' \pi_i + \frac{\sin^2 \mathbf{I}''}{6} \left\{ (\varrho \pi_i \cos h')^3 - \varrho \pi_i^3 \cos h' \dots \right\} \\ &= \varrho \cos h' \pi_i + \frac{\sin^2 \mathbf{I}''}{6} \pi_i^3 \left\{ (\varrho \cos h')^3 - \varrho \cos h' \dots \right\} \\ &= \varrho \cos h' \pi_i + \varrho \cos h' \pi_i \cdot \frac{\sin^2 \mathbf{I}''}{6} \pi_i^2 \left\{ \varrho^2 \cos^2 h' - 1 \right\} \end{aligned}$$

Da nun ϱ sehr nahe $= 1$ ist, so wird man setzen können $-1 + \varrho^2 \cos^2 h' = -\sin^2 h'$

$$q = \varrho \cos h' \pi_i \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \mathbf{I}''}{6} \pi_i^2 \sin^2 h' \dots \right\}$$

wo π_i in Sekunden ausgedrückt sein muss, will man q in Minuten erhalten, so ist

$$q' = \varrho \cos h' \pi_i' \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \mathbf{I}''}{6} \pi_i'^2 \sin^2 h' \dots \right\}$$

Multipliziert man, um eine einfachere Form zu erhalten, wieder aus, so ist:

$$q = \varrho \cos h' \pi_i - \pi_i^3 \frac{\sin^2 \mathbf{I}''}{6} \sin^2 h' \cos h' \dots$$

Jetzt lässt sich leicht zeigen, welchen Fehler man bei der Weglassung der subtractiven Glieder als Maximum begeht, die Maximalbedingung für dieselben ist

$$\frac{d \sin^2 h' \cos h'}{dh'} = 0$$

$$2 \sin h' \cos^2 h' - \sin^3 h' = 0$$

$$2 \cos^2 h' - \sin^2 h' = 0 \quad 2 \cotg^2 h' - 1 = 0$$

$$\cotg^2 h' = \frac{1}{2} \quad h' = 54^\circ 44'$$

Der Maximalwert beträgt demnach

$$\frac{\sin^2 \mathbf{I}''}{6} \pi_i^3 \sin^2 54^\circ 44' \cos 54^\circ 44'$$

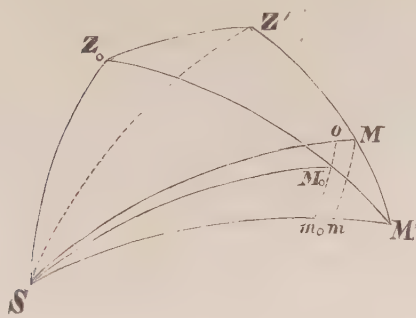
ausgerechnet unter Annahme des höchsten Wertes $61'$ für π .

$$q = \varrho \cos h' \pi_i = 0.074$$

Für die Zwecke der Längenbestimmung, die bei diesen Entwicklungen stets im Auge behalten werden, kann man Grössen, die weniger als ein bis zwei Zehntel der Bogensecunde betragen, vernachlässigen. Daher genügt es also vollkommen zu setzen

$$q = \varrho \pi_t \cos h' \dots$$

Nun ist aber die Erde nicht sphärisch, sondern sphäroidisch, das geocentrische Zenith fällt nicht zusammen mit dem Scheitelpunkt der Schwere. Dieser Umstand kommt wegen der geringen Grösse der Abplattung für die Sonne und die Fixsterne nicht in Betracht; der Mond dagegen erleidet infolge dessen eine parallactische Verschiebung nicht nur in Zenithdistanz, sondern auch im Azimut, ferner wird aber auch die Veränderung in Zenithdistanz eine andere. In der nebenstehenden Figur bedeute:



Z' das scheinbare Zenith

Z_0 das geocentrische Zenith

S den wahren (verbesserten) Ort des Gestirnes

M' den für Refraction verbesserten Mondort

M_0 den wahren Ort des Mondes

Dann ist $M'M_0$ die wahre Bewegung des Mondes,

SM' die scheinbare gemessene Distanz $= \Delta'$

SM_0 die wahre Distanz $= \Delta_0$

SM die ohne Berücksichtigung der Seitenparallaxe berechnete Distanz $= \Delta$

Wenn man jetzt noch die beiden Lothe Mm und $o M_0 w_0$ auf SM' fällt, so ist näherungsweise

$$Mo = m_0 m = M' m_0 - M' m$$

Man hat also:

$$\Delta = \Delta_0 + M' m_0 - M' m$$

Nun ist im Dreieck $M' M_0 m_0$

$$\operatorname{tg} M' m_0 = \operatorname{tg} M' M_0 \cos S M' Z'$$

$$M' m_0 = M' M_0 \cos S M' Z' \dots$$

ferner im Dreieck $M M' m$

$$\operatorname{tg} M' m = \operatorname{tg} M' M \cos S M' Z$$

$$M' m = M' M \cos S M' Z \dots$$

Dann im Dreieck $S M' Z'$

$$\cos S M' Z' = \frac{\sin H - \cos \Delta' \sin h'_0}{\sin \Delta' \cos h'_0}$$

schliesslich im Dreieck $S M' Z$

$$\cos S M' Z = \frac{\sin H - \cos \Delta' \sin h'}{\sin \Delta' \cos h'}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} M' M &= \varrho \pi (1 + \varepsilon'' \sin^2 \varphi) \cos h' \dots \\ M' M_0 &= \varrho \pi (1 - \varepsilon'' \sin^2 \varphi) \cos h'_0 \dots \end{aligned}$$

wo ε'' gefunden ist aus der Gleichung

$$Z Z' = \varphi - \varphi' \frac{e^2}{2} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \sin 2 \varphi = \varepsilon'' \sin 2 \varphi$$

Setzt man jetzt alle diese Werte ein in die Gleichung für $\mathcal{A}$, so wird

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \mathcal{A}_0 &= M' m_0 - M' m = \varrho \pi (1 - \varepsilon'' \sin^2 \varphi) \cos h'_0 \left(\frac{\sin H_0 - \cos \mathcal{A}' \sin h'_0}{\sin \mathcal{A}' \cos h'_0} \right) \\ &\quad - \varrho \pi (1 + \varepsilon'' \sin^2 \varphi) \cos h' \left(\frac{\sin H - \cos \mathcal{A}' \sin h'}{\sin \mathcal{A}' \cos h'} \right) \end{aligned}$$

Die Differenz $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0$ wird immer sehr klein sein, so dass man bei ihrer Berechnung an Stelle des beobachteten $\mathcal{A}'$ das berechnete $\mathcal{A}$ wird setzen können. Bezeichnet man

$$\begin{aligned} \text{mit } dh &\text{ den Wert } h' - h'_0 \\ \text{mit } dH &\text{ den Wert } H - H_0 \end{aligned}$$

so kann man die Glieder höherer Ordnung, welche dh^2 , dH^2 , $\pi (\mathcal{A}' - \mathcal{A})$, $\varepsilon'' dh$ und $\varepsilon'' dH$ enthalten, vernachlässigen und erhält:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \mathcal{A}_0 &= -2 \varepsilon'' \varrho \pi \sin^2 \varphi \left(\frac{\sin H_0 - \cos \mathcal{A} \sin h'_0}{\sin \mathcal{A}} \right) \\ &\quad + \varrho \pi \left(\frac{dH \cos \mathcal{A} \cos H - dh \cos h'}{\sin \mathcal{A}} \right) \end{aligned}$$

Nun ist weiter:

$$\begin{aligned} h'_0 &= h' + (\varphi - \varphi') \cos a \dots \\ H &= H_0 + (\varphi - \varphi') \cos A \dots \end{aligned}$$

wenn mit a das Azimut des Mondes, mit A das der Sonne bezeichnet wird.

Obige Gleichungen lassen sich noch weiter entwickeln, es ist:

$$\begin{aligned} (\varphi - \varphi') \cos a &= -\varepsilon'' \sin 2 \varphi \cos a \\ (\varphi - \varphi') \cos A &= -\varepsilon'' \sin 2 \varphi \cos A \end{aligned}$$

sodann nach den Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} -\cos a &= \frac{\sin d - \sin \varphi \sin h'}{\cos \varphi \cos h'} \\ -\cos A &= \frac{\sin d - \sin \varphi \sin H}{\cos \varphi \cos H} \end{aligned}$$

Diese Werte eingesetzt, ergibt sich

$$dh = h' - h'_0 = \varepsilon'' \sin 2 \varphi \left(\frac{\sin d - \sin \varphi \sin h'}{\cos \varphi \cos h'} \right)$$

$$dH = H - H_0 = \varepsilon'' \sin 2 \varphi \left(\frac{\sin D - \sin \varphi \sin H}{\cos \varphi \cos H} \right)$$

worin d die Deklination des Mondes, D die der Sonne bedeutet. Führt man diese Werte in die Gleichung für $\Delta - \Delta_0$ ein, so wird nach einigen einfachen Reductionen:

$$\Delta_0 - \Delta = \varrho \pi 2 \varepsilon \sin \varphi \left(\frac{\sin D - \sin d \cos \Delta}{\sin \Delta} \right)$$

Da der mittlere Wert von $\pi = 57' 0''$, $\varepsilon = \frac{1}{300}$; so kann man $\pi \cdot 2 \varepsilon = 22''.8$ setzen, und erhält als definitive Correction der Distanz für Seitenparallaxe

$$\Delta_0 - \Delta = 22''.8 \varrho \sin \varphi \left(\frac{\sin D - \sin d \cos \Delta}{\sin \Delta} \right) \left(\frac{\pi_t}{\pi_m} \right) \dots$$

wo man den letzten Factor gewöhnlich gleich 1 setzt.

Diese Entwicklungen rühren von Borda her.

X. Einfluss der Irradiation auf Sterndistanzen.

Es darf an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass, streng genommen, durch die Irradiation ebenfalls eine Veränderung der gemessenen Distanz hervorgerufen wird. Die Grösse der Irradiation wächst mit zunehmender Helligkeit und umgekehrt fällt sie bei abnehmender Helligkeit, sie muss also eine Function nicht nur des beobachteten Gestirns sein, sondern auch eine Constante des benutzten Instruments, oder wie Bessel sagt: „Man muss annehmen, dass Fernröhre vorhanden sind, die die Sonne durch Irradiation vergrössern, und andere, die sie in ihrer wahren Grösse zeigen.“ Die Sextanten mit ihrer bedeutenden Lichtabschwächung werden sie in keinem zu hohen Maasse zeigen, Da ausserdem bei der immerhin noch ziemlich bedeutenden Unsicherheit der Messungen des Durchmessers der Sonne über die Grösse der Irradiation genauere Daten nicht vorliegen, so soll von dieser Correction, die nur sehr gering sein könnte, abgesehen werden.

Capitel III.

Die Berechnung der Sterndistanzen.

Bei der Berechnung der Sterndistanzen kommen drei verschiedene Fälle in Betracht:

1. Die Distanz erhält gar keine Correction.
2. Die Distanz erhält eine Correction für Refraction.
3. Die Distanz erhält eine Correction für Refraction, Parallaxe und Halbmesser.

Der erste Fall begreift die Doppelsterne in sich, der zweite die Fixsterne. Beide haben das Gemeinsame, dass man aus schon erörterten Gründen Aequatoreal-Coordinationen vorzieht. Der dritte Fall endlich betrifft die Mondsdistanzen.

XI. Distanz zweier Fixsterne.

Bezeichnet man mit $\delta, \delta_1, \alpha, \alpha_1$ die scheinbaren, mit $\alpha', \alpha'_1, \delta', \delta'_1$ die durch Refraction veränderten Coordinationen, so gilt zunächst ganz allgemein:

$$\cos D = \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (\alpha - \alpha_1)$$

Diese Gleichung soll umgeformt werden.

$$1 - 2 \sin^2 \frac{D}{2} = \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 - 2 \cos \delta \cos \delta_1 \sin^2 \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2} \right)$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{D}{2} = \cos (\delta - \delta_1) - 2 \cos \delta \cos \delta_1 \sin^2 \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2} \right)$$

$$I \quad \sin^2 \frac{D}{2} = \sin^2 \left(\frac{\delta - \delta_1}{2} \right) + \cos \delta \cos \delta_1 \sin^2 \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2} \right)$$

Von dieser Gleichung ausgegangen gilt zunächst für den ersten Fall die folgende Vereinfachung:

$\frac{D}{2}$ wird stets so klein sein, dass man den sin mit dem Bogen vertauschen kann, dasselbe gilt von $\delta - \delta_1, \alpha - \alpha_1$, ferner bezeichne man $\delta - \delta_1$ mit $\Delta \delta$ und $\alpha - \alpha_1$ mit $\Delta \alpha$ und nehme für δ und δ_1 einen Mittelwert δ_m , so erhält man für Doppelsterne:

$$D^2 = (\Delta \delta)^2 + (\cos \delta_m \Delta \alpha)^2$$

Für Fixsterne ganz allgemein, könnte man die Gleichung I ohne weiteres anwenden, natürlich nachdem die scheinbaren α und δ , durch die verbesserten ersetzt sind, also in der Form:

$$\sin^2 \frac{D'}{2} = \sin^2 \left(\frac{\delta' - \delta'_1}{2} \right) + \cos \delta' \cos \delta'_1 \cos \left(\frac{\alpha' - \alpha'_1}{2} \right)$$

Um diese Gleichung für logarithmische Rechnung bequemer zu gestalten, kann man noch substituieren:

$$\sin \frac{\delta' - \delta'_1}{2} = n \sin N$$

$$\sqrt{\cos \delta' \cos \delta'_1} \sin \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2} \right) = n \cos N$$

man hat nach Einsetzung dieser Werte einfach

$$B \quad \sin \frac{D}{2} = n.$$

Man kann natürlich die Rechnung auch mit den scheinbaren α und δ durchführen und anwenden die Formel für dD :

$$dD = \cos p d\delta - \cos p_1 d\delta_1 + \cos d \sin p d\alpha - \cos \delta_1 \sin p_1 d\alpha_1,$$

wo man die parallactischen Winkel durch die Gaussischen Gleichungen findet:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{p + p_1}{2} &= \frac{\cos \frac{\delta - \delta_1}{2}}{\sin \frac{\delta + \delta_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{p - p_1}{2} &= \frac{\sin \frac{\delta - \delta_1}{2}}{\cos \frac{\delta + \delta_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \end{aligned}$$

Wenn man indessen doch schon einmal die parallactischen Winkel rechnen will, so ist es wohl angebrachter, die Distanz gleich durch die Gaussischen Gleichungen zu suchen, dann ist:

$$\operatorname{tg} \frac{D}{2} = \frac{\sin \frac{p - p_1}{2}}{\sin \frac{p + p_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\delta - \delta_1}{2} = \frac{\cos \frac{p - p_1}{2}}{\cos \frac{p + p_1}{2}} \operatorname{cotg} \frac{\delta + \delta_1}{2}$$

Was die Bequemlichkeit der Rechnung anbelangt, so ist sie bei dieser und der ersteren Gleichung dieselbe, am schnellsten führt aber jedenfalls die Gleichung B zum Ziele.

XII. Mondstrecken.

A. Die älteren Methoden.

Auf die hohe Bedeutung der Mondstrecken für die Bestimmung des Winkels, den zwei Meridiane mit einander bilden, ist schon in der Einleitung hingewiesen worden, hier kann ich also darüber hinweggehen. Wenn auch die Chronometer-Technik jetzt schon einen hohen Grad von Vollendung erreicht hat, so bleibt doch die fortschreitende Vervollkommenheit der Präzisionsmechanik nicht hinter ihr zurück, die winkelmessenden Apparate werden immer vortrefflicher und wenn auch bei den (winkelmessenden) Reflexionsinstrumenten die berührten Grenzen gezogen sind, so ist doch nicht gesagt, dass sie nicht auch in Zukunft noch bessere und genauere Resultate für Längenbestimmungen geben werden. Deshalb ist es auch durchaus keine müßige Arbeit, wenn man sich immer wieder daran macht, für die Berechnung der Länge aus Mondstrecken neue Formeln herzustellen, die auf möglichst schnelle und bequeme Weise ein Resultat aus den Beobachtungen herleiten lassen. Eine Geschichte der Mondstrecken, soweit eine solche nötig zu geben ist, steht schon am Anfang. Was die hier zu behandelnde rechnerische Seite des Problems anbelangt, so genügt es auch hier, noch einmal die wichtigsten Endgleichungen anzuführen, zu denen die verschiedenen Gelehrten gelangt sind, die sich eingehender mit dieser Sache befasst haben. — Alle Methoden, ausgenommen eine einzige, haben das Gemeinsame, dass sie ausgehen von der Betrachtung zweier sphärischen Dreiecke, deren Spitzen zusammenfallen. Die Seiten derselben sind die wahren resp. scheinbaren Höhen der Gestirne, der Winkel an der Spitze, die Differenz der Azimute ist bei den Dreiecken gemeinsam. Diese Methoden unterscheiden sich, abgesehen von den verschiedenen Endgleichungen und den Wegen, auf denen dazu gelangt wird, im Principe dadurch, dass die älteren Rechner die veränderte Distanz D selbst aufzufinden suchen, während die neueren Mathematiker und Astronomen den Unterschied der wahren und scheinbaren Distanz als unbekannte Grösse einführen. Erstere Methode verlangt beim Berechnen eine grössere Stellenzahl der Logarithmen, letztere lässt nicht immer eine streng analytische Lösung zu, sondern führt zu transscendenten Gleichungen, die durch logarithmische Näherung gelöst werden müssen, bietet aber den Vorteil, dass man sich auf eine geringere Stellenzahl beschränken kann. Ein weiterer Unterschied liegt darin, dass die einen die sphäroidische Gestalt der Erde nicht berücksichtigen, die anderen ziehen zwar diese mit in Rechnung, vernachlässigen aber die Veränderung der Mond- und Sonnenscheibe durch die Refraction. Nur Bessel und Dölln liefern ganz strenge Formeln, ersterer durch sinnreiches Umgehen der Schwierigkeiten, letzterer nimmt alle Correctionen in seiner Endformel mit.

A₁. Borda.

Ich komme nunmehr zu den Endgleichungen selbst. Die am meisten benutzte und wohl auch bekannteste Methode ist die von Borda, welche Sawitsch anführt. Sie hat mit den übrigen das Gemeinsame, dass sie ausgeht von den zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos D' &= \cos z' \cos z'_1 + \sin z' \sin z'_1 \cos (a - a_1) \\ \cos D &= \cos z \cos z_1 + \sin z \sin z_1 \cos (a - a_1)\end{aligned}$$

wo alle Grössen die schon mehrfach erwähnte Bedeutung haben. Man ersieht aus der Form der Gleichungen sofort, dass die Erde als sphärisch angenommen ist, da sonst $a' - a'_1$ an Stelle von $a - a_1$ auftreten müsste. Beinahe alle Rechner eliminiren nun $\cos (a - a_1)$ und gelangen dadurch zu der Gleichung:

$$\frac{\cos D' - \cos z' \cos z_1}{\sin z' \sin z_1} = \frac{\cos D - \cos z \cos z_1}{\sin z \sin z_1}$$

Der Unterschied der mannigfachen Methoden liegt in der jeder von ihnen eigenthümlichen Umformung dieses Ausdruckes. Borda gelangt durch Umgestaltung zu der Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 D}{2} &= \sin^2 \frac{1}{2} (z + z_1) - \sin \frac{1}{2} (z' + z'_1 + D') \sin \frac{1}{2} (z' + z'_1) \\ &\quad \sin \frac{1}{2} (z' + z' - D') \frac{\sin z \sin z_1}{\sin z'_1 \sin z'_1}\end{aligned}$$

Er substituirt dann:

$$\sin Q = \sin \frac{1}{2} (z + z_1) \sqrt{\sin \frac{1}{2} (z' + z'_1 + D') \sin \frac{1}{2} (z' + z'_1 - D') \frac{\sin z \sin z_1}{\sin z'_1 \sin z'_1}}$$

und erhält so:

$$\sin \frac{D}{2} = \sin \frac{1}{2} (z + z_1) \cos Q.$$

Die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt er durch Hinzufügung eines zweiten Ausdrucks von der Form:

$$2 \mu p \sin \varphi \left(\frac{\sin \delta_s}{\sin D} - \cotg D \sin \delta_m \right)$$

wobei noch zu bemerken ist, dass z nicht mit der wahren Horizontal-Parallaxe des Mondes p , sondern mit einer fingirten $= (1 + \mu \sin^2 \varphi) p$ berechnet ist, in der μ die Abplattung der Erde bedeutet. Die Veränderung der Mond- und Sonnenscheibe durch die Refraction wird vernachlässigt und bei der Reduction auf den Mittelpunkt, der durch die Parallaxe veränderte Halbmesser beim Monde, bei der Sonne einfach der uncorrigirte Halbmesser verwendet. Sawitsch hat diese Methode dadurch erweitert, dass er die Correction der Halbmesser für Refraction berücksichtigt, unverändert bringt sie Bohnenberger in seiner Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung.

A₂. Bremiker.

Brünnow giebt in seinem Lehrbuch der sphärischen Astronomie ein anderes Rechnungsverfahren, das von Bremiker herrührt. Während Borda die Distanz selbst

zu finden lehrt, führt Bremiker den Unterschied der wahren und scheinbaren Entfernung als Unbekannte ein, ein Weg, den Delambre zuerst betreten haben soll, und der dann von Legendre ausführlicher behandelt worden ist. Die Formeln, zu denen Legendre gelangte, will ich hier nicht anführen, sondern kehre zu Bremiker zurück. Dieser stellt die Endgleichung auf:

$$D = D'' + x$$

wo x gesetzt ist für:

$$x = d - d'' \frac{\sin \frac{1}{2} (d + d'')}{\sin \frac{1}{2} (D' + D'')}$$

Die Bedeutung der übrigen Grössen ist die folgende:

$$\begin{aligned} d &= z - z_1 \frac{\sin z \sin z_1}{\sin z' \sin z'_1} = \frac{1}{C} \cos d' = \cos d'' \\ d' &= z' - z'_1 \frac{\sin z' \sin z'_1}{\sin z \sin z_1} = \frac{1}{C} \cos d' = \cos d'' \end{aligned}$$

D' ist in $x = D$ gesetzt worden. Die Gleichung ist genau bis auf die Glieder zweiter Ordnung der Refraction und Parallaxe inclusive. Das so gefundene D muss dann mit Hilfe von Tafeln, die das nautische Jahrbuch bringt, für Parallaxe im Azimut und genauere Reduction der Distanz auf den Mittelpunkt des Gestirnes corrigirt werden. — Diese beiden Methoden finden immer noch die ausgedehnteste Anwendung, obgleich sie ein Operiren mit siebenstelligen Logarithmen erfordern, ein Aufwand, der mit der Genauigkeit des verlangten und erreichten Resultates in keinem Verhältniss steht. Die Eleganz derselben ist auch nur eine scheinbare, da die Hinzufügung der Correctionsglieder dieselbe völlig illusorisch macht. —

A₃. Bessel.

Ganz verschieden von diesen Methoden ist die von Bessel, die erste, die das Resultat in aller Strenge finden lehrt. Die Abplattung der Erde zunächst berücksichtigt Bessel dadurch, dass er alle Grössen nicht auf den Erdmittelpunkt reducirt, sondern auf den Schnittpunkt zwischen der Lothrichtung und der Erdachse; er betrachtet die Erde sodann als eine Kugel, deren Radius gleich der Länge dieses Lothes vom Beobachtungsort bis zum Schnittpunkt ist. Die Veränderung der Figur der Mond- und Sonnenscheibe umgeht Bessel, indem er die Strahlenbrechung nicht auf den Mittelpunkt des Gestirnes bezieht, sondern auf den Punkt am Rande, in welchem der grösste Kreis durch den Mondmittelpunkt, den Stern und den Beobachtungsort den Mondrand schneidet. Schliesslich reducirt er den Fall, dass man die Entfernung zwischen Sonne und Mond gemessen hat, auf den einfacheren Mond-Fixstern. Man ersieht, dass alle Correctionen in Rechnung gezogen werden, weiter eingehen will ich auf diese Methode nicht, sondern

verweise auf die Originalabhandlung Bessels.¹⁾ Dass Bessels Bemühungen, dieser strengen Methode Eingang zu verschaffen, gescheitert sind, liegt wohl darin, dass sie eine grössere Arbeit verlangt, wie alle übrigen, und dann, dass sie die Berechnung von speciellen Ephemeriden erfordert, wie sie zwar Schuhmacher für die Jahre 1835–1836 gegeben hat, die aber seitdem nicht wieder mitgeteilt sind.

A₄. Döllen.

Als letzte verdient auch die Methode von Döllen noch Beachtung, die Schwarz²⁾ näher entwickelt hat. Die Klarlegung derselben ist so kurz, dass ich sie hier ganz anführen will. Döllen bezeichnet die Veränderungen z , z_1 , $E = (a - a_1)$, D mit respective dz , dz_1 , dE und x , die d sind dann die Summe aller Veränderungen, die durch Refraction und Parallaxe hervorgebracht werden. Man hat die Form

$$\cos D = \cos z \cos z_1 + \sin z \sin z_1 \cos E$$

$$\cos (D + x) = \cos (z + dz) \cos (z_1 + dz_1) + \sin (z + dz) \sin (z_1 + dz_1) \cos (E + dE)$$

oder aber da

$$\cos D = F(z, z_1, E)$$

$$\cos (D + x) = F\{(z + dz), (z_1 + dz_1), (E + dE)\}$$

so kann man nach dem Taylor'schen Satze in eine Reihe entwickeln, wobei die einzelnen Differenzialquotienten die folgenden Ausdrücke geben:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1 \cos E = -\sin D \cos M$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = -\cos z \sin z_1 + \sin z \cos z_1 \cos E = -\sin D \cos S$$

$$\frac{\partial F}{\partial E} = -\sin z \sin z_1 \sin E = -\sin D \sin z \sin M$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\cos D$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} = -\cos D$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial E^2} = \sin z \sin z_1 \cos E$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z_1} = \sin z \sin z_1 + \cos z \cos z_1 \cos E = \cos D - 2 \cos (z + z_1) \sin^2 \frac{E}{2}$$

¹⁾ Bessel. Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern.

²⁾ Schwarz. Ueber die Reduction der scheinbaren und wahren Mondsdistanzen auf einander.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial E} &= -\sin z \cos z_1 \sin E = -\sin D \cos z_1 \sin S \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial E} &= -\cos z \sin z_1 \sin E = -\sin D \cos z \sin M \\ \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} &= \sin D \cos M\end{aligned}$$

wo M und S die Winkel sind, die vorher mit g und g_1 bezeichnet worden waren. Setzt man diese Grössen ein und lässt die Glieder höherer Ordnung fort, sobald sie unter ein bis zwei Zehntel Bogensecunde betragen, so erhält man für x aus der Gleichung für $\cos D$ nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}x = \frac{\sin D}{\sin \left(D + \frac{x}{2}\right)} &\left\{ dz \cos M + dz_1 \cos S + dE \sin M \sin z \right. \\ &\left. + 2 \sin 1'' \left(\frac{dz - dz_1}{2}\right)^2 \cotg D + \frac{2 \sin 1'' \sin^2 \frac{E}{2} \cos(z + z_1)}{\sin D} dz dz_1 \right\} \dots\end{aligned}$$

oder wenn man x aus der Gleichung für $\cos D'$ haben will, so nimmt es die Form an:

$$\begin{aligned}x = \frac{\sin D'}{\sin \left(D' - \frac{x}{2}\right)} &\left\{ dz \cos M' + dz_1 \cos S' + dE \sin M' \sin z' \right. \\ &\left. - 2 \sin 1'' \left(\frac{dz - dz_1}{2}\right) \cotg D' - 2 \sin 1'' dz dz_1 \frac{\sin^2 \frac{E}{2} \cos(z' + z'_1)}{\sin D'} \right\} \dots\end{aligned}$$

Aus einer dieser Gleichung erhält man x , also D' , das nur noch für Halbmesser der Gestirne corrigirt werden muss, so dass die wahre Distanz wird:

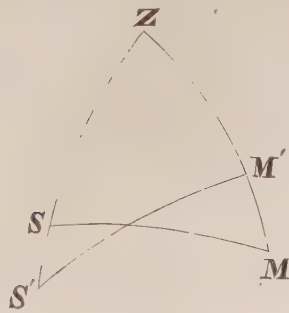
$$D' = D'' + \varrho - \Delta \varrho \cos^2 M' + \varrho' - \Delta \varrho' \cos^2 S'$$

Die Vorteile und Nachteile der Döllens'schen Methode sind augenfällige. Während andere Rechnungsvorschriften mit sieben Decimalstellen kaum ausreichen, kommt man mit dem Döllens'schen Verfahren selbst bei kleinen Distanzen mit fünf Decimalstellen aus, was schon eine ganz bedeutende Zeitersparnis giebt. Der Nachteil liegt in der Unbequemlichkeit der Formel gerade für logarithmische Rechnung und in der geringen Eleganz derselben, indessen mit Tafeln der natürlichen Winkelfunctionen ermöglicht sie ein recht schnelles und bequemes Rechnen.

B. Neue Methode.*)

Die Entwicklung, die ich nunmehr hier folgen lassen will, hat zunächst mit allen neueren Methoden der Berechnung einer Längenbestimmung durch Mondsdistanzen das Gemeinsame, dass sie nicht die Distanz selbst auffinden lehrt, sondern die Differenz zwischen der scheinbaren und wahren Entfernung, sie führt in Folge dessen auch nicht zu einer rein analytischen Auflösung, sondern nur zu Näherungsgleichungen. Sie hat Aehnlichkeit mit dem Verfahren von Dölln darin, dass sie sich wie dieses auf eine Reihenentwicklung stützt, aber diese Entwicklung ist nicht nach dem Taylor'schen Satze ausgeführt, sondern nach Potenzen von Refraction und Parallaxe und führt zu einer verhältnismässig einfachen Endgleichung.

Bezeichnet man in dem Dreiecke Zenith, Stern, Mond mit M bezüglich M' die Oerter des Mondes an der Sphäre, mit S, S' die des zweiten Gestirnes, dessen Entfernung vom Monde gemessen werden soll, wo die wahren Grössen die ungestrichelten, die scheinbaren die mit einem Strich versehenen sind, so ist:



$MS = D$ die wahre, zu berechnende Distanz,
 $M'S' = D'$ die scheinbare, gemessene Distanz,
 $ZM = 90^\circ - h_m$
 $ZM' = 90^\circ - h'_m$ } für den Mond,
 $ZS = 90^\circ - h_s$
 $ZS' = 90^\circ - h'_s$ } für das andere Gestirn,

Es sind hier die Höhen eingeführt statt der sonst üblichen Zenithdistanzen, um eine gewisse Conformität mit der Gleichung für Sterndistanzen im allgemeinen herzustellen, und weil man durch diese Einführung zu einfachen Formeln gelangt. Die wahren Höhen sind hier die für Strahlenbrechung und Höhenparallaxe corrigirten, so dass sie also mit den scheinbaren verbunden sind durch die Relationen:

$$\begin{aligned}
 h_m &= h'_m + \varrho P_m \sin h'_m - k_{r, m} \cotg h'_m \\
 h_s &= h'_s + \varrho P_s \sin h'_s - k_{r, s} \cotg h'_s
 \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken bezeichnet ϱP_m die Horizontalparallaxe des Mondes, ϱP_s die des anderen Gestirnes, während k die von Bessel mit $\lg a$ bezeichnete Refractionsconstante ist.

Man ersieht aus den obigen Ausdrücken schon, dass insofern auf die vorbesselschen Entwicklungen zurückgegriffen ist, als die Erde zunächst als sphärisch betrachtet werden soll. An Stelle der h_m und h_s führt man besser gleich die Differenz wahre minus schein-

*) Diese Methode wurde im Seminar zur Ausbildung im wissenschaftlichen Rechnen zu Berlin vorgetragen.

bare Höhe ein und bezeichnet diese Veränderung der Höhe wie bei dem Capitel über Refraction mit dh , es ist also

$$\begin{aligned} h_m - h'_m &= dh_m = q k_{h, m} \cotg h'_m \\ h_s - h'_s &= dh_s = k_{h, s} \cotg h'_s - P \cos h_s \end{aligned}$$

q ist die Parallaxe in geocentrischer Zenithdistanz. Die schon angegebenen Gleichungen für die Entfernung sind:

$$\begin{aligned} \cos D &= \sin h_m \sin h_s + \cos h_m \cos h_s \cos E \\ \cos D' &= \sin h'_m \sin h'_s + \cos h'_m \cos h'_s \cos E \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Elimination von $\cos E$ die wahre Distanz

$$\text{I } \cos D - \cos D' \frac{\cos h_m \cos h_s}{\cos h'_m \cos h'_s} = \cos (h_m - h_s) - \cos (h'_m - h'_s) \frac{\cos h_m \cos h_s}{\cos h'_m \cos h'_s}$$

Um den unbequemen Bruch fortzuschaffen, führt man erst an Stelle der h' die obigen Ausdrücke ein und substituirt dann für denselben den Wert $1 - y$, also

$$\cos (h'_s - dh'_s) \cos (h_m + dh'_m) = (1 - y) \cos (h'_m - h'_s)$$

Zu dieser Substitution ist man immer berechtigt, weil dh_s grösser als dh_m und daher der Bruch kleiner als 1. Setzt man diesen Wert in die Gleichung I ein, so erhält man:

$$\text{II } \cos D - (1 - y) \cos D' = \cos (h_m - h_s) - (1 - y) \cos (h'_m - h'_s)$$

Auch diese Gleichung ist noch wenig elegant und für logarithmische Rechnung unbequem, man führt deshalb an Stelle der mit $(1 - y)$ multiplicirten Glieder zur Abkürzung ein:

$$(1 - y) \cos D' = \cos D''$$

Da nun y immer eine kleine Grösse ist, so wird $\cos D'$ nicht sehr viel von $\cos D''$ verschieden sein, man kann also den Unterschied der beiden Grössen gleich einem kleinen Incremente u setzen, also:

$$D'' - D' = u.$$

Obige Gleichung lässt sich auch in der Form schreiben:

$$\cos D'' - \cos D' = -y \cos D'.$$

Löst man hierin die Differenz der $\cos$ auf, so erhält man für u die Form:

$$2 \sin \frac{u}{2} = \sin \left(D' + \frac{u}{2} \right)$$

Da nun u nur ein kleines Increment ist, so wird man den $\sin$ mit dem Bogen vertauschen können und hat dann schliesslich:

$$u = \frac{y}{\sin 1''} \cdot \frac{\cos D'}{\sin \left(D' + \frac{u}{2} \right)} \dots$$

Eine gleiche Entwicklung lässt sich für das zweite mit $(1 - y)$ multiplicirte Glied durchführen, man setzt

$$\begin{aligned} (1 - y) \cos (h'_s - h'_m) &= \cos (h''_s - h''_m) \\ (h''_s - h''_m) - (h'_s - h'_m) &= w \\ 2 \sin \frac{w}{2} &= \frac{y \cos (h'_s - h'_m)}{\sin \left(h'_s - h'_m + \frac{w}{2} \right)} \\ w &= \frac{y}{\sin 1''} \cdot \frac{\cos (h'_s - h'_m)}{\sin \left(h'_s - h'_m + \frac{w}{2} \right)} \dots \end{aligned}$$

Setzt man die aus diesen Gleichungen gefundenen Werte in Gleichung II ein, so ist:

$$\text{III} \quad \cos D - \cos (D' + u) = \cos (h_s - h_m) - \cos (h'_s - h'_m + w)$$

Um nun schliesslich den Ausdruck auch für logarithmische Rechnung bequem zu machen, zieht man die beiden Glieder auf der rechten und die auf der linken Seite in eins zusammen durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} D - (D' + u) &= x, \text{ oder} \\ D &= D' + (u + x) \\ (h_s - h_m) - (h'_s - h'_m + w) &= V, \text{ oder} \\ (h_s - h'_s) - (h_m - h'_m) - w &= V \text{ oder da} \\ h_s - h'_s &= - dh_s^*) \\ h_m - h'_m &= + dh_m \\ - dh_s - dh_m - w &= V \end{aligned}$$

Setzt man ein, so erhält man die Gleichung

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{V}{2} \sin \left(h'_s - h'_m + w + \frac{V}{2} \right)$$

Die Gleichung ist nach Auflösung der $\cos$ entstanden.

*) Auf Seite 32 ist in dieser Formel ein Vorzeichen-Fehler.

Man hat also für x die Gleichung:

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sin \left(h'_s - h'_m + w + \frac{V}{2} \right) \sin \frac{V}{2}}{\sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right)}$$

oder in dh ausgedrückt:

$$1) \sin \frac{x}{2} = \frac{-\sin \frac{dh_s + dh_m + w}{2} \cdot \sin \left\{ h'_s - h'_m + \frac{w}{2} - \left(\frac{dh_s + dh_m}{2} \right) \right\}}{\sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right)}$$

Meist werden scheinbare Höhen nicht gleichzeitig beobachtet sein; man führt in diesem Falle die wahren Höhen ein und muss dann natürlich die obige Gleichung entsprechend umformen. Der Uebergang von den scheinbaren auf die wahren Höhen lässt sich leicht bewerkstelligen. Man schreibt zunächst die obige Gleichung folgendermaassen:

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{-\sin \left(\frac{dh_s + dh_m + w}{2} \right) \cdot \sin \left\{ \left(h'_s - \frac{dh_s}{2} \right) - \left(h'_m + \frac{dh_m}{2} \right) + \frac{w}{2} \right\}}{\sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right)}$$

Nun ist:

$$h'_s - \frac{dh_s}{2} = h_s + \frac{dh_s}{2}$$

$$h'_m + \frac{dh_m}{2} = h_m - \frac{dh_m}{2}$$

Setzt man diese Werte ein, so nimmt die Gleichung die Form an:

$$2) \sin \frac{x}{2} = \frac{-\sin \left(\frac{dh_s + dh_m + w}{2} \right) \sin \left\{ \left(h_s + \frac{dh_s}{2} \right) - \left(h_m - \frac{dh_m}{2} \right) + \frac{w}{2} \right\}}{\sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right)}$$

Auf diese Weise ist die Lösung des Problems gegeben. Allerdings steht $\frac{x}{2}$ auf beiden Seiten, ist also nicht explicite vorhanden, doch wird dieser Umstand nicht allzuviel ausmachen. Die Gleichung muss durch successive Näherung gelöst werden. Einen ziemlich genauen Wert erhält man schon, wenn man auf der rechten Seite der Gleichung $\frac{x}{2}$

unter dem $\sin = 0$ setzt. Wenige Versuche, zwei bis höchstens drei, werden in der Regel bereits genügen, um den Wert von $\frac{x}{2}$ streng zu erhalten. Man braucht dann nur rückwärts zu substituieren, um D zu erhalten.*) —

Was die einzelnen Grössen an betrifft, die in der Entwicklung noch gebraucht werden, so sollen dieselben hier gesondert abgehandelt werden. Man hatte:

$$1 - y = \frac{\cos(h_m + dh_m) \cdot \cos(h_s - dh_s)}{\cos h_m \cdot \cos h_s}$$

ein Ausdruck, in dem sowohl $dh_m > 0$ als auch $dh_s > 0$. —

Um dieses y zu berechnen, lässt sich die folgende Entwicklung anstellen. Es ist:

$$\begin{aligned} \cos(h'_m + dh_m) &= \cos h'_m \cos dh_m - \sin h'_m \sin dh_m \\ \cos(h'_s - dh_s) &= \cos h'_s \cos dh_s + \sin h'_s \sin dh_s \end{aligned}$$

oder wenn man $\cos h'_m$ bezüglich $\cos h'_s$ vor die Klammer zieht und noch setzt:

$$\begin{aligned} \cos dh_m &= 1 - 2 \sin^2 \frac{dh_m}{2} \\ \cos dh_s &= 1 - 2 \sin^2 \frac{dh_s}{2} \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \cos(h'_m + dh_m) &= \cos h'_m \left\{ 1 - \operatorname{tg} h'_m \sin dh_m - 2 \sin^2 \frac{dh_m}{2} \right\} \\ \cos(h'_s - dh_s) &= \cos h'_s \left\{ 1 + \operatorname{tg} h'_s \sin dh_s - 2 \sin^2 \frac{dh_s}{2} \right\} \end{aligned}$$

Der Ausdruck $2 \sin^2 \frac{dh_s}{2}$ wird immer eine sehr kleine Grösse sein, da $dh_s \leq 5'$, so dass dieses Glied ganz unbedenklich fortfallen kann, während das entsprechende Glied $2 \sin^2 \frac{dh_m}{2}$ noch mitgenommen werden muss, da dh_m bis zu einer bedeutenden Höhe, $61'$, anwachsen kann. Diese Werte sollen nun in $1 - y$ eingesetzt werden, man erhält sodann:

$$1 - y = (1 + \operatorname{tg} h'_s dh_s \sin 1'' \dots) \left(1 - \operatorname{tg} h'_m \sin dh_m - 2 \sin^2 \frac{dh_m}{2} \right)$$

worin noch $\sin dh_s = dh_s \sin 1''$ gesetzt ist. Multiplicirt man die beiden Klammern aus, so wird man ihrer Kleinheit wegen alle Glieder höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigen können und erhält dann:

*) Siehe auch Seite 39.

$$1 - y = 1 - \operatorname{tg} h'_m \sin dh_m \dots + \operatorname{tg} h'_s dh_s \sin 1'' \\ - \operatorname{tg} h'_m \operatorname{tg} h'_s dh_s \sin 1'' dh_m \sin 1'' - \frac{dh_m^2}{2} \sin^2 1'' \dots$$

oder auch

$$y = \sin dh_m \operatorname{tg} h'_m - dh_s \operatorname{tg} h'_s \sin 1'' \\ + dh_s \operatorname{tg} h'_s dh_m \operatorname{tg} h'_m \sin^2 1'' + \frac{dh_m^2}{2} \sin^2 1'' \dots$$

und $\sin 1''$ noch abgesondert

$$\frac{y}{\sin 1''} = \frac{\sin dh_m}{\sin 1''} \cdot \operatorname{tg} h'_m - dh_s \operatorname{tg} h'_s \\ + \sin 1'' \left(dh_s \operatorname{tg} h'_s dh_m \operatorname{tg} h'_m + \frac{dh_m^2}{2} \right) \dots$$

Schliesslich kann man noch $\sin dh_m$ in eine Reihe entwickeln und bekommt alsdann als Endgleichung:

$$\frac{y}{\sin 1''} = dh_m \operatorname{tg} h'_m - dh_s \operatorname{tg} h'_s \\ + \sin 1'' \left(dh_s \operatorname{tg} h'_s dh_m \operatorname{tg} h'_m + \frac{dh_m^2}{2} \right) \\ - \frac{1}{6} \sin^2 1'' (dh_m^3 \operatorname{tg} h'_m \dots) \dots$$

Damit nun nicht in jedem einzelnen Falle die ganze Berechnung der Grösse $\frac{y}{\sin 1''}$ durchgeführt zu werden braucht, könnte man den zweiten Teil der obigen Gleichung unter Annahme mittlerer Werte tabuliren. Wir zerspalten also y in

$$y = y_0 + dy_0.$$

Die beiden Componenten von y haben die Form:

$$\frac{y_0}{\sin 1''} = dh_m \operatorname{tg} h'_m - dh_s \operatorname{tg} h'_s \\ \frac{dy_0}{\sin 1''} = \sin 1'' \left\{ dh_s \operatorname{tg} h'_s dh_m \operatorname{tg} h'_m + \frac{dh_m^2}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{tg} h'_m dh_m^3 \sin 1'' \dots \right\}$$

Hier kommt es nur auf den zweiten Ausdruck an. In denselben sollen jetzt die Werte für dh_m und dh_s eingesetzt werden. Es war:

$$\begin{aligned} dh_s \operatorname{tg} h'_s &= -\varrho P \sin h'_s + k_{hs} \\ dh_m \operatorname{tg} h'_m &= \varrho \pi \sin h'_m - k_{hm} \end{aligned}$$

k kann allerhöchstens eine Einheit betragen, P ist eine sehr kleine Grösse, man kann also bei der Multiplication die Glieder höherer Ordnung ganz unbedenklich fortlassen und setzen:

$$dh_s \operatorname{tg} h'_s \, dh_m \operatorname{tg} h'_m = +\varrho \pi k_{hs} \sin h'_m \dots$$

Die Summe der hierbei vernachlässigten Glieder beträgt nur 0"07. Das folgende Glied $\frac{dh_m^2}{2}$ nimmt die folgende Gestalt an:

$$\frac{dh_m^2}{2} = \frac{1}{2} (\varrho \pi \cos h'_m)^2 - \varrho \pi k_{hm} \cos h'_m \cotg h'_m + \frac{1}{2} (k_{hm} \cotg h'_m)^2$$

Das letzte Glied endlich wird:

$$-\frac{1}{6} \operatorname{tg} h'_m \, dh_m^3 \sin i'' = -\frac{1}{6} \sin i'' \operatorname{tg} h'_m (\varrho \pi \cos h'_m)^3 \dots$$

Nimmt man jetzt für $\varrho \pi$ überall als mittleren Wert 57' an, für $k = 1, \dots$, ausser in dem Gliede $(k \cotg h')^2$, wo man genauer $k = 0,85$ setzen muss, so erhält man:

$$\frac{dy_0}{\sin i''} = 0".02 \left(1 - \frac{1}{8}\right) \left\{ \begin{aligned} &(40 \cos h'_m)^2 \\ &- 57 \cos h'_m \cotg h'_m \\ &+ 57 \sin h'_m \\ &+ (0.6 \cotg h'_m)^2 \\ &- 2.1^3 \cos^2 h'_m \sin h'_m \end{aligned} \right.$$

Zieht man schliesslich noch die mit 57 multiplicirten Glieder in eins zusammen, so wird:

$$\frac{dy_0}{\sin i''} = 0".02 \left(1 - \frac{1}{8}\right) \left\{ \begin{aligned} &40 \cos^2 h'_m \\ &- 57 \frac{\cos 2 h'_m}{\sin h'_m} \\ &+ (0.6 \cotg h'_m)^2 \\ &- 2.1^3 \cos^2 h'_m \sin h'_m \end{aligned} \right.$$

Der strenge Ausdruck wäre gewesen:

$$\frac{dy_0}{\sin i''} = \sin i'' \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \varrho^2 \pi^2 \cos^2 h'_m \sin i'' - \varrho \pi k_{h_m} \frac{\cos^2 h'_m}{\sin h'_m} \sin i'' + \frac{1}{2} k_{h_m}^2 \cotg h'_m \sin i'' \\ & + \varrho \pi k_{h_s} \sin h'_m - k_{h_m} k_{h_s} - \varrho^2 \pi P \sin h'_m \sin h'_s + \varrho P k_{h_s} \sin h'_m \\ & - \frac{1}{6} \sin i'' \varrho^3 \pi^3 \cos^2 h'_m \sin h'_m + \frac{1}{2} \sin i'' k_{h_m} \varrho^2 \pi^2 \cos^2 h'_m \\ & - \frac{1}{2} \sin i'' k_{h_m}^2 \varrho \pi \sin h'_m + \frac{1}{6} \sin i'' k_{h_m}^3 \cotg^2 h'_m \end{aligned} \right.$$

Da die vernachlässigten Glieder sich teilweise aufheben, so beträgt der Unterschied der strengen und der genäherten Formel noch keine Zehntel Bogensekunde.

Dieser Ausdruck ist mit dem Argumente h'_m in eine Tafel gebracht, eine zweite Tafel bringt eine Verbesserung dieses Ausdrucks für die jedesmalige Parallaxe. Tafel II im Anhang. Man hatte ausserdem:

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{\sin i''} &= dh_m \operatorname{tg} h'_m - dh_s \operatorname{tg} h'_s \\ &= \varrho \pi \sin h'_m + \varrho P \sin h'_s - k_{h_m} + k_{h_s} \\ \frac{y}{\sin i''} &= \frac{y_0}{\sin i''} + \frac{\Delta y_0}{\sin i''} \end{aligned}$$

Auch die einzelnen Glieder des Ausdrucks für $\frac{y_0}{\sin i''}$ liessen sich in eine Tafel bringen, doch ist die hierdurch erlangte Zeitersparniss nur eine geringe. Auf diese Weise lässt sich $\frac{y}{\sin i''}$ ohne gerade grössere Rechnung bilden. Hat man dieses, so kann man die u und w berechnen. Es war:

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{\sin i''} \cdot \frac{\cos D'}{\sin \left(D' + \frac{u}{2} \right)} \\ w &= \frac{y}{\sin i''} \cdot \frac{\cos (h'_s - h'_m)}{\sin \left(h'_s - h'_m + \frac{w}{2} \right)} \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich natürlich nur durch ein Näherungsverfahren auflösen. Da sowohl u als auch w nur kleine Incremente sind, so erhält man schon eine ziemlich gute Näherung, wenn man sie auf der rechten Seite unter dem $\sin$ fortlässt. Die weitere Berechnung, die sich übrigens mit vierstelligen Logarithmen durchführen lässt, gestaltet sich in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{y}{\sin 1''} \frac{\cos D'}{\sin D'} \\
u_2 &= \frac{y}{\sin 1''} \frac{\cos D'}{\sin \left(D' + \frac{u_1}{2} \right)} \\
u_3 &= \frac{y}{\sin 1''} \frac{\cos D'}{\sin \left(D' + \frac{u_2}{2} \right)} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
u_n &= \frac{y}{\sin 1''} \frac{\cos D'}{\sin \left(D' + \frac{u_{n-1}}{2} \right)}
\end{aligned}$$

Bezeichnet man jetzt mit

$$\frac{d \lg u}{d u} = \lambda \text{ für eine Aenderung von } 10''$$

$$\frac{d \lg \sin D'}{d D'} = \mu \text{ für eine Aenderung von } 5''$$

so wird

$$\begin{aligned}
u_2 - u_1 &= -u_1 \cdot \frac{\mu}{\lambda} \\
u_3 - u_2 &= -(u_2 - u_1) \frac{\mu}{\lambda} = u_1 \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
u_n - u_{n-1} &= 0 = (u_{n-1} - u_{n-2}) \frac{\mu}{\lambda} = u_1 \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Wenn man jetzt auf beiden Seiten die untereinanderstehenden Glieder addirt, so erhält man

$$\begin{aligned}
u_n - u_1 &= -u_1 \left\{ \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^3 + \dots + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-1} \right\} \\
&= -u_1 \cdot \frac{\frac{\mu}{\lambda}}{1 - \frac{\mu}{\lambda}} = -u_1 \left(\frac{\mu}{\lambda - \mu} \right)
\end{aligned}$$

Genau in derselben Weise würde man die Gleichungen für w und x zu behandeln haben.

Hat man w und u , so ist auch W gegeben, denn es war:

$$\begin{aligned} -W &= V = -dh_s - dh_m - w \\ &= \varrho P \cos h'_s - \varrho \pi \cos h'_m - k_{h_s} \cotg h'_s + k_{h_m} \cotg h'_m - w. \end{aligned}$$

Wenn übrigens die scheinbaren Höhen nicht beobachtet sind, so berechnet man w aus folgender Gleichung:

$$w = \frac{y}{\sin 1''} \cdot \frac{\cos (h_s - h_m + dh_s + dh_m)}{\sin \left(h_s - h_m + dh_s + dh_m + \frac{w}{2} \right)}$$

Je nachdem nun scheinbare Höhen beobachtet sind oder nicht, ergibt sich $\frac{x}{2}$ aus Gleichung 1 oder Gleichung 2 auf Seite 34. In ersterem Falle hätte man:

$$x = \frac{-W \sin \left(h'_s - h'_m + w - \frac{W}{2} \right)}{\sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right)}$$

wenn man, was bei der Kleinheit von x ja immer gestattet ist, die Gleichung für x denen für u und w conform gestaltet. In letzterem, weitaus häufigerem Falle ist:

$$x = \frac{W \cdot \sin \left(h_s - h_m + \frac{W}{2} \right)}{\sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right)}$$

Aus x und u setzt sich dann die Formel für die Distanz zusammen, es ist:

$$D_1 = D' + (u + x)$$

Gemäss den früheren Entwicklungen erhält die so gefundene Distanz noch zwei Verbesserungen, die eine für Seitenparallaxe, die zweite für Halbmesser der Gestirne, falls man es nicht vorgezogen hat, was meist geschieht, die Beobachtungen gleich auf die Mittelpunkte der Gestirne zu reduciren. Erstere Verbesserung hat die Form:

$$D_1 - D_2 = \frac{22''.8 \sin \varphi \sin \delta_s - \cos D' \sin D_m}{\sin D'}$$

Letztere würde man schreiben müssen:

$$D_3 - D_2 = e_m - d e_m \cos^2 m + e_s - d e_s \cos^2 m_s$$

Diese letztere Correction wird jedoch meist und besser gleich an die beobachtete Distanz angebracht und mit dem so verbesserten D' weiter gerechnet.

Zur Demonstration der Anwendbarkeit der Methode lasse ich noch ein Rechenbeispiel folgen:

Rechnungsbeispiel.

Am 26. April 1885 wurde in Berlin mit einem Troughton'schen Sextanten die Distanz Mond—Jupiter beobachtet. Chronometer von Fletscher.

Beobachtungszeit	=	8 ^h 29 ^m 59 ^s .5 M. B. Z.
Uhr correction	=	+ 0 ^m 46 ^s .3
Länge gegen Greenwich	=	53 ^m 35 ^s + $d\lambda$
M. Gr. Zeit	=	7 ^h 37 ^m 10 ^s .8 — $d\lambda$
Gemessene Distanz	=	42° 13' 55"
Indexfehler	=	— 4' 10"
Jupitersradius	=	18".5
Mondsradius	=	15' 38".4
D'	=	42° 25' 42"

$$\begin{aligned} \vartheta &= + 17^\circ C & b &= 332,8 \text{ par. Linien.} \\ \gamma &= 1162 & \beta &= - 58. \end{aligned}$$

Berechnung der Reduction für Refraction und Parallaxe.

$\alpha_m = 12^\circ 28' 59".9$	$\alpha_I = 9^\circ 54' 10".1$
$\delta_m = - 2^\circ 48' 23".6$	$\delta_I = + 14^\circ 1' 3".7$
$r_m = - 1^h 38^m 23".0$	$r_I = + 0^\circ 56' 26".8$
$h_m = 30^\circ 55' 39"$	$h_I = 49^\circ 54' 6"$
$e p \cos h_m = 48' 59"$	$e P \cos h_I = 0' 1"$
Refraction = 1' 36"	Refraction = 0' 47"
$dh_m = + 47' 23"$	$dh_I = + 0' 46"$

$$\frac{y}{\sin 1''} = \frac{y_0}{\sin 1''} + \frac{dy_0}{\sin 1''}$$

$$\frac{dy_0}{\sin 1''} \text{ siehe Tafel II.}$$

$$\frac{y_0}{\sin 1''} = p (1 + \varepsilon \sin^2 \varphi) \sin h'_m + P \sin h'_I - (k'_{h_m} + k'_{h_I})$$

$p (1 + \varepsilon \sin^2 \varphi) \sin h'_m = 28' 31''$ $P \sin h'_I = 1''$ $k_{h'_m} + k_{h'_I} = 1' 52''$	$P = 1' 7''$ $p = 56' 51''$	$\frac{y_0}{\sin 1''} = 26' 40''$ $\frac{dy_0}{\sin 1''} = + 19'' 9$ <u>Correction = 0,0</u> $\frac{y}{\sin 1''} = 27' 0''$
---	--------------------------------	--

$$\text{Seitenparallaxe} = p \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot \varrho \cdot \sin \varphi \left(\frac{\sin \delta_m - \sin \delta_I \cos D'}{\sin D'} \right)$$

$$\begin{aligned} p \cdot 2 \cdot \varepsilon &= 22''.8 \\ \varrho \sin \varphi &= 0.793 \\ p \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot \varrho \sin \varphi &= 18''.1 \\ (18''.1) (-0.32) &= 5''.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \delta_m &= -0.042 \\ \sin \delta_I \cos D' &= 0.175 \\ \text{Differenz} &= -0.217 \\ \sin D' &= 0.676 \\ \text{Bruch} &= -0.32 \end{aligned}$$

$$1) u = \frac{y}{\sin 1''} \frac{\cos D'}{\sin \left(D' + \frac{u}{2} \right)}$$

$$2) w = \frac{y}{\sin 1''} \frac{\cos (h_I - h_m + dh_I + dh_m)}{\sin \left(h_I - h_m + dh_I + dh_m + \frac{w}{2} \right)}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sin 1''} &= 0^0 27' 0'' \\ D' &= 42^0 25' 42'' \\ \lg \frac{y}{\sin 1''} &= 3.20952 \\ \cos D' &= 9.86813 \\ \Sigma &= 3.07765 \\ \sin D' &= 9.82909 \\ \text{Differenz} &= 3.24856 \\ u_1 &= 29' 32'' \\ \sin \left(D' + \frac{u_1}{2} \right) &= 9.83113 \\ \lg u &= 3.24652 \\ u &= 29' 24'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_I - h_m &= 18^0 58' 27'' \\ dh_I + dh_m &= 48' 9'' \\ h_I - h_m + dh_I + dh_m &= 19^0 46' 36'' \\ \cos (\dots\dots\dots) &= 9.97360 \\ \sin (\dots\dots\dots) &= 9.52937 \\ \text{Differenz} &= 0.44423 \\ \lg \frac{y}{\sin 1''} &= 3.20952 \\ \Sigma &= 3.65375 \\ w_1 &= 1^0 15' 6'' \\ \sin \left(h_I - h_m + dh_I + dh_m + \frac{w_1}{2} \right) &= 9.54234 \\ \lg w &= 3.64078 \\ w &= 1^0 12' 57'' \end{aligned}$$

$$3) W = dh_I + dh_m + w = 2^0 1' 6''$$

$$4) x = \frac{-W \sin \left(h_I - h_m + \frac{W}{2} \right)}{\sin \left(D' + u + \frac{x}{2} \right)}$$

$$\begin{array}{r|l}
 h_J - h_m + \frac{W}{2} = 19^\circ 59' 0'' & D' + u = 42^\circ 55' 6'' \\
 \sin \left(h_J - h_m + \frac{W}{2} \right) = 9.53370 & \sin (D' + u) = 9.83311 \\
 \lg W = 3.86130 & \\
 \Sigma = 3.39500 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \lg x_1 = 3.56189_{\mu} \\
 x_1 = -1^\circ 0' 47'' \\
 x = -1^\circ 1' 22''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 5) D_1 = D' + u + x = 41^\circ 53' 44'' \\
 D_2 = D_1 - \text{Seitenparallaxe} = 41^\circ 53' 38''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Für M. Z. Gr. } 7^h 37^m 10^s.8 - d\lambda & D_2 = 41^\circ 53' 38'' = \text{Beobachtung} \\
 \text{Für M. Z. Gr. } 7^h 38^m 10^s.8 & D_0 = 41^\circ 53' 51'' = \text{Rechnung}
 \end{array}$$

$$d\lambda = \frac{D_0 - D_2}{\left(\frac{dD}{dT} \right)} = -24^s.8$$

Daraus abgeleitete Längendifferenz Berlin—Greenwich

$$\begin{array}{l}
 = 53^m 35^s + d\lambda = 53^m 10^s.2 \\
 \text{wahre Differenz} = \underline{53^m 34^s.9} \\
 \text{Fehler} = 24^s.7
 \end{array}$$

Die Vorteile dieser Methode sind klar. Die ganze Berechnung gründet sich auf die Auffindung kleiner Incremente, bedarf daher überall nur einer geringen Stellenanzahl bei der logarithmischen Rechnung, während sie andererseits für diese überall bequeme Formeln bietet. Die einzige Grösse, die eine längere Rechnung erfordert, $\frac{dy_0}{\sin 1''}$ lässt sich leicht tabuliren. Möge daher diese Methode sich möglichst weiten Eingang verschaffen.

Anhang.

Tafel I.

$d\alpha = k \operatorname{tg} z \sin w \sec \delta$													
δ	0 ^h	1 ^h	2 ^h	3 ^h	4 ^h	5 ^h	6 ^h	7 ^h	8 ^h	9 ^h	10 ^h	11 ^h	12 ^h
-25°	0".00	49".08											
-20	0.00	33.08	81".29										
-15	0.00	25.73	59.04	118".74									
-10	0.00	20.81	46.39	90.07	181".69								
0	0.00	15.44	33.19	57.38	97.69								
+10	0.00	12.87	27.01	44.79	70.21	115".92							
+20	0.00	11.72	24.35	38.92	57.94	85.54	135".35						
+30	0.00	11.62	23.77	37.26	53.12	73.27	101.52	147".89					
+40	0.00	12.35	25.01	38.62	53.55	70.01	89.58	112.99	141".17	173".01			
+50	0.00	14.31	28.89	43.69	58.89	74.35	92.69	103.77	114.01	115.35	99".73	60".00	0".00
+60	0.00	18.54	36.98	55.06	72.48	88.77	102.01	111.31	113.99	104.89	82.46	57.81	0.00
+70	0.00	28.17	55.62	81.35	104.69	123.92	137.67	143.27	138.42	123.94	90.79	48.69	0.00
+80	0.00	59.27	116.00	179.60	209.99	241.52	258.79	258.92	240.27	202.28	146.29	76.99	0.00
+90	0.00												

Bei $t = 0^h$ bis 12^h ist $d\alpha$ positiv, bei $t = 12^h$ bis 24^h ist $d\alpha$ negativ zu nehmen.

$d\delta = k \operatorname{tg} z \cos w$													
δ	0 ^h	1 ^h	2 ^h	3 ^h	4 ^h	5 ^h	6 ^h	7 ^h	8 ^h	9 ^h	10 ^h	11 ^h	12 ^h
-25°	+1008".21	+273".27	+232".56										
-20	180.53	191.21	169.01										
-15	138.21	144.85	121.00	+173".81									
-10	110.33	114.92	121.00	169.99	+283".15								
0	75.07	77.71	86.54	105.73	147.00								
+10	52.73	54.79	60.05	72.21	95.54	+146".31							
+20	36.77	38.01	42.52	50.83	52.60	94.58	+155".84						
+30	23.91	25.00	28.65	35.38	46.50	65.65	99.21	+166".85					
+40	12.80	1.39	1.71	22.75	32.00	46.50	68.52	105.21	+164".83	+251".92			
+50	+ 2.53	+ 0.35	+ 0.65	1.21	2.98	31.60	48.77	69.89	103.33	144.63	+192".46	+206".60	+253".05
+60	- 7.60	- 0.67	- 0.36	+ 0.14	+ 0.92	1.81	33.27	50.48	71.00	93.69	115.63	131.98	138.17
+70	18.20	1.79	1.42	- 0.09	- 0.01	+ 0.85	20.52	34.75	50.06	65.01	78.21	87.01	+ 90.28
+80	- 30.04	- 2.89	- 2.01	- 1.96	- 0.11	- 0.01	+ 1.00	+ 22.39	+ 34.65	+ 45.69	+ 54.92	+ 60.83	+ 62.88
+90													

Bei $t = 12^h$ bis 24^h geht man mit dem Argumente $t - 12^h$ ein. Das Vorzeichen bleibt.

Tafel II.

$$\frac{dy_0}{\sin 1''}$$

Höhe	$\frac{dy_0}{\sin 1''}$	Diff.	Höhe	$\frac{dy_0}{\sin 1''}$	Diff.	Höhe	$\frac{dy_0}{\sin 1''}$	Diff.
10°	+21.86		35°	+18.12		60°	+7.55	
11	22.15	+29	36	17.74	-38	61	7.16	-39
12	22.40	25	37	17.34	40	62	6.78	38
13	22.57	17	38	16.93	41	63	6.41	37
14	22.67	10	39	16.52	41	64	6.05	36
15	+22.71	4	40	+16.10	42	65	+5.70	35
		+2			-43			-35
16	+22.73	-2	41	+15.67	43	66	+5.35	34
17	22.71	7	42	15.24	43	67	5.01	32
18	22.64	10	43	14.81	43	68	4.69	31
19	22.54	14	44	14.38	43	69	4.38	30
20	+22.40	-15	45	+13.95	-43	70	+4.08	-29
		19	46	+13.52	44	71	+3.79	27
22	22.06	20	47	13.08	44	72	3.52	26
23	21.86	22	48	12.64	44	73	3.26	25
24	21.64	24	49	12.20	44	74	3.01	24
25	+21.40	-27	50	+11.76	-44	75	+2.77	-22
		27	51	+11.32	43	76	+2.55	21
26	+21.13	29	52	10.89	43	77	2.34	19
27	20.86	31	53	10.46	43	78	2.15	18
28	20.57	34	54	10.03	43	79	1.97	17
29	20.26	-35	55	+9.60	-42	80	+1.80	-15
30	+19.92	35	56	+9.18	42	81	+1.65	13
		36	57	8.76	41	82	1.52	12
31	+19.57	37	58	8.35	40	83	1.40	11
32	19.22	-37	59	7.95	-40	84	1.29	-9
33	18.86		60	+7.55		85	+1.20	
34	18.49							
35	+18.12							

Verbesserung obiger Tafel für die jeweilige Parallaxe in 0.01.

h	53'	54'	55'	56'	57'	58'	59'	60'	61'	h
10°	+38	+29	+19	+9	0	-10	-19	-29	-39	10°
15	23	17	11	5	0	6	12	18	23	15
20	16	12	8	4	0	3	7	11	15	20
25	9	7	5	2	0	2	4	6	8	25
30	7	5	3	1	0	2	4	6	7	30
35	4	3	2	1	0	-1	2	3	4	35
40	+2	+2	+1	+1	0	0	-1	-1	-1	40
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45
50	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	50
55	4	-3	-2	-1	0	+1	+2	2	3	55
60	3	2	2	1	0	1	2	4	5	60
65	5	3	2	1	0	1	3	4	5	65
70	5	4	3	1	0	1	3	5	6	70
75	7	5	3	1	0	2	4	5	6	75
80	7	5	3	1	0	1	3	5	6	80
85	6	-5	-3	-1	0	+2	+4	+6	+8	85

Lebenslauf.

Verfasser, Friedrich Theodor Gotthold Plato, geboren am 7. October 1858 zu Berlin, evangelischer Confession, genoss den ersten Unterricht auf der Kuhnnow'schen höheren Knabenschule zu Berlin. Seine humanistische Vorbildung erhielt er auf dem Friedrichs-Gymnasium zu Berlin, welches er Michaelis 1879 mit dem Zeugniß der Reife verliess. Darauf widmete er sich auf der Friedrich Wilhelms-Universität zu Berlin dem Studium der Astronomie, Mathematik und Physik acht Semester hindurch. Fünf Semester war er Mitglied des Seminars zur Ausbildung im wissenschaftlichen Rechnen unter der Leitung der Herren Förster, Tietjen, Bruns. Von seinem vierten Semester ab war es ihm durch die Güte des Herrn Professor Förster gestattet, theils unter Leitung, theils selbständig auf der Sternwarte zu arbeiten. Seit October 1883 wurde er bei der Sternwarte als Rechner beschäftigt, im Juli 1884 wurde er Hilfsarbeiter bei der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Commission, welche Stellung er noch jetzt bekleidet. —

Während seiner Studienzeit besuchte er die Vorlesungen der Herren: v. Helmholtz, Bruns, Kummer, Förster, Wangerin, Weierstrass, Glan, Tietjen, Kirchhof, Lehmann-Filhés, Thiesen, Hettner, Zeller, Deussen.

Allen diesen Herren, seinen hochverehrten Lehrern, insbesondere aber Herrn Professor Förster, der nicht aufgehört hat, ihn mit Rat und That zu unterstützen, spricht Verfasser an dieser Stelle seinen aufrichtigsten und wärmsten Dank aus.



